

---

Devoir maison 10 pour le 6/03/2026

---

**Exercice 1.**

Une banque propose de prêter de l'argent selon le modèle suivant. L'emprunteur reçoit une somme  $c$  et doit rembourser le double vingt ans plus tard.

Soit  $q \in [0; 1]$  la probabilité de non remboursement et  $X$  la variable aléatoire égale au gain de la banque.

1. Donner la loi de  $X$ .

Si l'emprunteur ne rembourse pas :  $X = -c$  et si l'emprunteur rembourse :  $X = 2c - c = c$ .  
Ainsi :

$$X(\Omega) = \{-c; c\} \text{ et } P(X = -c) = q, \quad P(X = c) = 1 - q$$

2. Préciser l'espérance et la variance de  $X$  en fonction de  $q$  et  $c$ .

On a  $E(X) = -c \times P(X = -c) + c \times P(X = c) = -cq + c(1 - q) = (1 - 2q)c$ .

Et d'après la formule de König-Huygens :  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

Or  $E(X^2) = (-c)^2 P(X = -c) + c^2 P(X = c) = c^2 q + c^2 (1 - q) = c^2$ .

Donc  $Var(X) = c^2 - ((1 - q)c)^2 = 4q(1 - q)c^2$

Considérons maintenant 10 banques et 10 emprunteurs. Ces dix banques vont partager les risques de la manière suivante. Chaque prêt est découpé en 10 tranches de  $c/10$  pour un gain de  $2c/10$ , chaque tranche est désignée par le terme titre. Les banques se répartissent équitablement les titres. Ainsi, chaque banque dispose désormais 10 titres. Notons  $X'$  le gain d'une banque et  $N$  le nombre d'emprunteurs qui vont faire défaut. On suppose que les événements "L'emprunteur  $i$  fait défaut" sont mutuellement indépendants.

3. Donner la loi de  $N$ . Préciser l'espérance et la variance.

Pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , notons  $X_i$  la variable indicatrice de l'évènement "l'emprunteur  $i$  fait défaut". C'est-à-dire,  $X_i$  prend la valeur 1 si l'évènement est réalisé et 0 sinon. On a  $N = \sum_{i=1}^{10} X_i$ .  
Or les variables  $X_i$  sont mutuellement indépendantes, de même paramètre  $q$ , donc

$$N \hookrightarrow \mathcal{B}(10, q).$$

En particulier,

$$E(N) = 10q \text{ et } Var(N) = 10q(1 - q).$$

4. (a) Donner la relation entre  $X'$  et  $N$ .

Pour chaque emprunteur faisant défaut, la perte est de  $c/10$ . Pour chaque emprunteur qui rembourse, le gain est de  $c/10$ . D'où :

$$X' = -N \frac{c}{10} + (10 - N) \frac{c}{10} = \left(1 - \frac{2N}{10}\right) c.$$

- (b) En déduire l'espérance et la variance de  $X'$ .

Par linéarité :

$$E(X') = E\left(\left(1 - \frac{2N}{10}\right) c\right) = \left(1 - \frac{2E(N)}{10}\right) c = (1 - 2q)c$$

Par propriété de la variance :

$$\text{Var}(X') = \left(-\frac{2c}{10}\right)^2 \text{Var}(N) = \frac{4q(1-q)}{10} c^2$$

(c) Comparer ces résultats avec  $X$ .

D'après les questions précédentes :

$$E(X') = E(X) \text{ et } \text{Var}(X') = \frac{1}{10} \text{Var}(X)$$

5. Expliquer l'intérêt pour les banques de ce procédé.

En moyenne le gain de la banque est le même. Par contre, le risque est supporté par l'ensemble des banques, il est donc moins important.

*Remarque* : L'hypothèse de mutuelle indépendance est une hypothèse forte dans ce modèle de gestion des risques. Dans le cas d'une crise importante que impacte de nombreux agents économiques, cette hypothèse n'est plus vérifiée et les pertes peuvent devenir très importantes.

### Exercice 2.

Déterminer les limites des suites de terme général  $u_n$  lorsque :

1.  $u_n = (n+2) \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$  donc on peut écrire que :

$$\tan\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n+1}$$

ce qui montre que :

$$u_n \sim \frac{n+2}{n+1} \sim \frac{n}{n}$$

et on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

2.  $u_n = (1 + e^{-n})^n$

On écrit  $u_n$  sous forme exponentielle :

$$u_n = \exp(n \ln(1 + e^{-n})) = e^{v_n}$$

avec  $v_n = n \ln(1 + e^{-n})$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ , donc, par équivalent classique :

$$v_n \sim n \times e^{-n} \sim \frac{n}{e^n}$$

et par croissances comparées :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

On en déduit le résultat :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

3.  $u_n = n^2 \ln \left( \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)$

On pense au classique  $+1 - 1$  :

$$\ln \left( \cos \frac{1}{n} \right) = \ln \left( 1 + \left( \cos \frac{1}{n} - 1 \right) \right) \sim \cos \frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$$

on en tire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \times \left( -\frac{1}{2n^2} \right) = -\frac{1}{2}$$

### Exercice 3.

On cherche à déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant

$$P(0) = 0 \text{ et } P(X^2 + 1) = (P(X))^2 + 1. (*)$$

Soit  $P$  un tel polynôme.

1. Déterminer  $P(1)$ ,  $P(2)$ ,  $P(5)$ .

En utilisant  $X = 0$  dans  $(*)$  on trouve :

$$P(1) = P(0)^2 + 1 = 1$$

Donc  $P(1) = 1$ .

De même en utilisant  $X = 1$  dans  $(*)$  on obtient :

$$P(2) = P(1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Et en utilisant  $X = 2$  on a :

$$P(5) = P(2)^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

2. On pose la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

- (a) Montrer que  $(u_n)$  est croissante.

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 - u_n = u_n^2 - u_n + 1$$

Or le polynôme  $x^2 - x + 1$  a un discriminant  $\Delta = -3 < 0$  donc  $x^2 - x + 1 > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . En particulier  $u_{n+1} - u_n > 0$ . Donc la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

- (b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(u_n) = u_n$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{R}(n)$  : " $P(u_n) = u_n$ ".

- Initialisation :  $P(u_0) = P(0) = 0 = u_0$  donc  $\mathcal{R}(0)$  est vraie.
- Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $\mathcal{R}(n)$  vraie. Alors

$$\begin{aligned} P(u_{n+1}) &= P(u_n^2 + 1) \\ &= (P(u_n))^2 + 1 \text{ par } (*) \\ &= u_n^2 + 1 \text{ par HR} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{R}(n+1)$  est vraie

- Conclusion : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(u_n) = u_n$ .

3. On pose  $Q(X) = P(X) - X$ . Montrer que  $Q$  admet une infinité de racines.

On remarque que  $Q(u_n) = P(u_n) - u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par la question précédente. Donc le polynôme  $Q$  a une infinité de racines (tous les  $u_n$  qui sont tous distincts car la suite est strictement croissante).

4. Conclure.

Le polynôme  $Q$  s'annule une infinité de fois. Le polynôme  $Q$  est donc le polynôme nul (sinon il s'annulerait au plus  $\deg(Q)$  fois). Ainsi  $P(X) - X = 0$ . Donc

$$P(X) = X$$

#### Exercice 4.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^n dt$$

1. Calculer  $\int_0^1 \left( \frac{1+t}{2} \right)^n dt$  et montrer que sa limite est nulle lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

L'intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 \left( \frac{1+t}{2} \right)^n dt = \left[ \frac{2}{n+1} \left( \frac{1+t}{2} \right)^{n+1} \right]_0^1 = \frac{2}{n+1} \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

et la limite ne pose aucun problème :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left( \frac{1+t}{2} \right)^n dt = 0 \times (1 - 0) = 0$$

2. En comparant  $a_n$  et l'intégrale précédente, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

On a bien évidemment :

$$\forall t \in [0, 1], t^2 \leq t \Rightarrow \forall t \in [0, 1], \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^n \leq \left( \frac{1+t}{2} \right)^n$$

et en intégrant, avec les bornes dans le sens croissant :

$$0 \leq a_n \leq \int_0^1 \left( \frac{1+t}{2} \right)^n dt$$

Le théorème d'encadrement montre que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

3. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

4. (a) Exprimer  $S_n$  à l'aide d'une intégrale.

Par linéarité de l'intégrale :

$$S_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^k dt$$

(b) Montrer que la suite  $(S_n)$  converge vers :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2} dt$$

Il reste à calculer la somme, qui est la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1} \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1+t^2}{2}} = \frac{2}{3+t^2} + (-1)^n \frac{\left( \frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1+t^2}{2}}$$

Il reste à intégrer, et on trouve :

$$S_n = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2} dt + (-1)^n J_n$$

où on a posé :

$$J_n = \int_0^1 \frac{\left( \frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1+t^2}{2}} dt$$

Il est évident que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 1 + \frac{1+t^2}{2} \geq 1 \Rightarrow \forall t \in [0, 1], \quad \frac{\left( \frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1}}{1 + \frac{1+t^2}{2}} \leq \left( \frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1}$$

et en intégrant, on trouve :

$$0 \leq J_n \leq a_{n+1}$$

Le théorème d'encadrement montre alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$$

et on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2} dt$$

(c) Calculer cette dernière intégrale en posant  $t = \sqrt{3} \tan u$ .

On rappelle que  $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

On a  $\frac{dt}{du} = \sqrt{3} (1 + \tan^2 u)$ , ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{3+3 \tan^2 u} \sqrt{3} (1 + \tan^2 u) du = \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} du = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$