
Devoir maison 10 pour le 6/03/2026

Exercice 1.

Une banque propose de prêter de l'argent selon le modèle suivant. L'emprunteur reçoit une somme c et doit rembourser le double vingt ans plus tard.

Soit $q \in [0; 1]$ la probabilité de non remboursement et X la variable aléatoire égale au gain de la banque.

1. Donner la loi de X .
2. Préciser l'espérance et la variance de X en fonction de q et c .

Considérons maintenant 10 banques et 10 emprunteurs. Ces dix banques vont partager les risques de la manière suivante. Chaque prêt est découpé en 10 tranches de $c/10$ pour un gain de $2c/10$, chaque tranche est désignée par le terme titre. Les banques se répartissent équitablement les titres. Ainsi, chaque banque dispose désormais 10 titres. Notons X' le gain d'une banque et N le nombre d'emprunteurs qui vont faire défaut. On suppose que les événements "L'emprunteur i fait défaut" sont mutuellement indépendants.

3. Donner la loi de N . Préciser l'espérance et la variance.
4. (a) Donner la relation entre X' et N .
(b) En déduire l'espérance et la variance de X' .
(c) Comparer ces résultats avec X .
5. Expliquer l'intérêt pour les banques de ce procédé.

Exercice 2.

Déterminer les limites des suites de terme général u_n lorsque :

1. $u_n = (n + 2) \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$
2. $u_n = (1 + e^{-n})^n$
3. $u_n = n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 3.

On cherche à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$P(0) = 0 \text{ et } P(X^2 + 1) = (P(X))^2 + 1. (*)$$

Soit P un tel polynôme.

1. Déterminer $P(1)$, $P(2)$, $P(5)$.
2. On pose la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$
 - (a) Montrer que (u_n) est croissante.
 - (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$
3. On pose $Q(X) = P(X) - X$. Montrer que Q admet une infinité de racines.
4. Conclure.

Exercice 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt$$

1. Calculer $\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt$ et montrer que sa limite est nulle lorsque n tend vers $+\infty$.
2. En comparant a_n et l'intégrale précédente, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

4. (a) Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale.
- (b) Montrer que la suite (S_n) converge vers :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2} dt$$

- (c) Calculer cette dernière intégrale en posant $t = \sqrt{3} \tan u$.
On rappelle que $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.