

Devoir maison 11 pour le 17/03/2026

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

(a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

La limite en 0 ne pose pas problème, c'est celle de $\ln$, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

En $+\infty$, on a une forme indéterminée ; mais on met tout sous un même logarithme et on sait que $x/(x+1)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

(b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser son tableau de variations.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable comme combinaison de fonctions usuelles dérivables. On a d'ailleurs

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	0

(c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$.

Par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= f(n). \end{aligned}$$

(d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

D'après le tableau de variations de f , on voit que $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, $f(n) < 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ et la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

- (e) Écrire une fonction d'en-tête : `function y=u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .

C'est un programme que l'on peut faire avec une boucle `for` ou avec une opération pointée. On propose les deux versions.

```
def u(n):
    y=0
    for k in range(1,n+1):
        y=y+1/k
    y=y-np.log(n)
    return y
```

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

et c'est ce qu'on voulait.

- (b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$.

On définit la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$. La fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions usuelles dérivables et sur cet intervalle :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Comme $x \geq 0$ et $1+x \geq 1 > 0$, le quotient $g'(x)$ est positif ou nul : la fonction g est donc croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Comme $g(0) = 0$ on en déduit que pour tout x de $[0 ; +\infty[$,

$$g(x) \geq 0 \iff x - \ln(1+x) \geq 0 \iff x \geq \ln(1+x) \iff \ln(1+x) \leq x.$$

- (c) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

En appliquant cette inégalité à $x = 1/n$, on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ ou encore que (v_n) est croissante.

On admet la convergence de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

3. (a) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.

Le calcul de la somme partielle de la série susnommée fait apparaître une somme télescopique ;

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n - v_n - u_1 + 1 = v_n$$

- (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ .
Ainsi, (v_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \gamma.$$

4. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

On voit que

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} \iff u_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Comme (v_n) converge et que $1/n \rightarrow 0$, on en déduit que (u_n) converge et a la même limite que (v_n) , c'est à dire γ .

- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$
 (v_n) étant croissante et convergente vers γ , (u_n) étant décroissante et convergente vers γ , on a bien l'encadrement demandé

$$v_n \leq \gamma \leq u_n.$$

Ceci permet de voir que

$$0 \leq u_n - \gamma = v_n - \gamma + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

ce qui donne bien

$$|u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

- (c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la question 1) e : a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps=input('Entrer un réel strictement positif : ')
n=np.floor(1/eps)+1
display(u(n))
```

Le programme proposé permet de calculer une approximation de γ à la précision `eps` près (rentrée par l'utilisateur). En effet, une telle approximation sera réalisée par un terme u_n tel que $|u_n - \gamma| < \text{eps}$, ce qui, d'après la question précédente a lieu dès que $1/n < \text{eps}$. Il suffit de prendre le premier entier n tel que $n > 1/\text{eps}$, donné par $\lfloor 1/\text{eps} \rfloor + 1$.

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

5. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

Le terme général de la série est équivalent à celui d'une série convergente. En effet,

$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

et la convergence de ce terme a été justifiée ci-avant.

6. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$.

Observons que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \iff \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et on reconnaît une décomposition des indices de sommation selon leur parité.

- (b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}$.

Il suffit de mettre au même dénominateur et de procéder par identification

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} &\iff \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha(2n-1) + \beta n}{n(2n-1)} \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

- (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

On utilise les résultats des deux dernières questions

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \quad (\text{d'après 2b.}) \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad (\text{d'après 2a.}) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

7. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

On revient à la définition de u_n

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n + \ln(2) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) + \ln(2) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n) + \ln(2) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

(b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

D'après 6c et 7a, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= 2 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n} - u_n + \ln(2)) \\ &= 2 \ln(2), \end{aligned}$$

car, comme (u_n) converge, u_{2n} et u_n ont même limite et leur différence tend vers 0.

8. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

On voit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n \left(1 + \frac{k}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}. \end{aligned}$$

(b) Retrouver alors le résultat de la question 7b.

Par propriété des intégrales de Riemann, si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(x) dx.$$

En prenant $g(x) = \ln(x+1)$, on voit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(2),$$

et on retrouve bien la valeur précédente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = 2 \ln(2).$$