
Devoir maison 11 pour le 17/03/2026

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.
 - (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser son tableau de variations.
 - (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = f(n)$.
 - (d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (e) Écrire une fonction d'en-tête : **def u(n):** qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n .
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
(b) Montrer que pour tout réel x positif :

$$\ln(1+x) \leq x.$$

- (c) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

On admet la convergence de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.

3. (a) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ converge vers γ .
4. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$.
(c) On rappelle que l'instruction **np.floor(x)** renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction **u** de la question 1) e : a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps=input('Entrer un réel strictement positif : ')\n n=np.floor(1/eps)+1\n display(u(n))
```

Partie II : Étude d'une série

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

5. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

6. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}.$

(b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}.$

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$

7. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

(b) Calculer alors $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$

8. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$

(b) Retrouver alors le résultat de la question 7b.