
Devoir maison 12 pour le 24/03/2026

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$.

($X = 1$) est réalisé lorsqu'on obtient "pile" dès le premier lancer, avec la pièce 0, ou la 1, ou la 2. La formule des probabilités totales, écrite avec le système complet d'événements $\{A_0, A_1, A_2\}$ donne donc :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \sum_{n=0}^2 P(X = 1 \cap A_n) \\ &= \sum_{n=0}^2 P_{A_n}(X = 1) \times P(A_n) \text{ par formule des probas composées} \\ &= P_{A_0}(P_1) \times P(A_0) + P_{A_1}(P_1) \times P(A_1) + P_{A_2}(P_1) \times P(A_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (b) Montrer que : $\forall n \geq 2, P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

La même formule des probabilités totales donne :

$$P(X = n) = P_{A_0}(X = n) \times P(A_0) + P_{A_1}(X = n) \times P(A_1) + P_{A_2}(X = n) \times P(A_2)$$

Pour $n \geq 2$:

- On a

$$\begin{aligned}
 P_{A_0}(X = n) &= P_{A_0}(F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n) \\
 &= P_{A_0}(F_1) \times P_{A_0}(F_2) \dots \times P_{A_0}(F_{n-1}) \times P_{A_0}(P_n) \\
 &\text{car les lancers sont indépendants une fois la pièce choisie} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n.
 \end{aligned}$$

- $P_{A_1}(X = n) = 0$ car la pièce 1 ne donne jamais "pile" .
- $P_{A_2}(X = n) = 0$ car la pièce 2 donne "pile" dès le premier coup.

On a alors pour $n \geq 2$:

$$P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$.

Calculons d'abord :

$$P(X \neq 0) = P(X = 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On a ici une série géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, convergente (car $|q| < 1$) mais qui commence à $n = 2$.

Donc

$$\begin{aligned}
 P(X \neq 0) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$P(X = 0) = 1 - P(X \neq 0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

X admet une espérance $E(X)$ si, et seulement si , la série de terme général $k P(X = k)$ est absolument convergente. Comme $\forall k \in \mathbb{N}, k P(X = k) \geq 0$, cela revient à montrer la convergence simple de la série.

Soit $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n k P(X = k)$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + \sum_{k=2}^n k P(X = k) \\ &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + \sum_{k=2}^n k \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Or $k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée première de raison $q = \frac{1}{2}$ convergente. La suite (S_n) est donc convergente, ainsi la série de terme général $k P(X = k)$ converge, et X admet une espérance.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + \frac{1}{6} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} 3 \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.

D'après le théorème de transfert, $X(X-1)$ possède une espérance ssi, la série qui définit

$E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)$ est absolument convergente, et cette série est à termes positifs (pour $n \geq 1$), donc cela revient à montrer sa convergence.

Soit $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n k(k-1) P(X = k)$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= 0 + \sum_{k=2}^n k(k-1)P(X = k) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=2}^n k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{12} \sum_{k=2}^n k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}. \end{aligned}$$

Or $k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$ est le terme général d'une série géométrique dérivée seconde de raison $q = \frac{1}{2}$ convergente. La suite (S_n) est donc convergente.

Ainsi la série de terme général $k(k-1) P(X=k)$ converge, et $X(X-1)$ admet une espérance.

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \frac{1}{12} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{12} \frac{2}{(1-1/2)^3} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance, on a : $E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$, on en déduit que $E(X^2) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$. Par formule de König-Huygens, on obtient :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X) = \frac{4}{3}.$$

4. Justifier que Y suit la même loi que X .

Par symétrie de "pile" et "face" dans la pièce 0 et par symétrie des deux pièces 1 et 2, on pourrait déterminer la loi de Y pour montrer que c'est la même que celle de X .

5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1] \cap [Y=j]) = P([Y=j])$.

Pour tout entier j supérieur ou égal à 2 :

Si $[Y=j]$ est réalisé, "face" n'arrive qu'au j -ième ($j \geq 2$) lancer, alors on a eu "pile" au premier lancer et donc $[X=1]$ est réalisé.

Donc $[Y=j] \subset [X=1]$ et $[X=1] \cap [Y=j] = [Y=j]$.

Par suite : $P([X=1] \cap [Y=j]) = P([Y=j])$.

- (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P([X=i])$.

Si $i \geq 2$, on a de la même façon $[X=i] \cap [Y=1] = [X=i]$ (car si "pile" arrive au i -ième coup, le premier lancer est "face"), et donc $P([X=i] \cap [Y=1]) = P([X=i])$.

6. Loi de $X+Y$.

- (a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2. X et Y étant des variables aléatoires entières positives, $X+Y$ est aussi à valeurs entières positives. De plus,

- la valeur 0 est impossible pour $X+Y$, car on a $X+Y=0$ ssi ($X=0$ et $Y=0$), c'est impossible car cela signifie qu'on n'a que des "face" et que des "pile".
- 2 est une valeur impossible pour $X+Y$ car

$$[X+Y=2] = ([X=0] \cap [Y=2]) \cup ([X=1] \cap [Y=1]) \cup ([X=2] \cap [Y=0])$$

Or, on ne peut avoir ni $([X=0] \cap [Y=2])$ (que des "face" et le premier "face" au 2-ième coup), ni $([X=1] \cap [Y=1])$ ("pile" et "face" au premier coup), ni $([X=2] \cap [Y=0])$ (le premier "pile" au 2-ième coup et que des "pile"). Donc $[X+Y=2]$ est l'ensemble vide.

- (b) Montrer que $P(X+Y=1) = \frac{2}{3}$.

On a : $P(X+Y=1) = P([X=0] \cap [Y=1]) + P([X=1] \cap [Y=0])$.

Or $([X=0] \cap [Y=1]) = [X=0]$ (puisque "X=0" implique "Y=1")

et de même, $([X=1] \cap [Y=0]) = [Y=0]$ ("que des pile" implique "pile au premier coup").

$$\text{Donc : } P(X+Y=1) = P([X=0]) + P([Y=0]) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

- (c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

$\{P_1, F_1\}$ est un système complet d'événements donc par formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} (X + Y = n) &= ((P_1 \cap [X + Y = n]) \cup (F_1 \cap [X + Y = n])) \\ &= ([X = 1] \cap [Y = n - X = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - Y = n - 1]) \end{aligned}$$

On a donc bien , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

- (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X + Y = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

Par incompatibilité des événements on a, pour $n \geq 3$:

$$P(X + Y = n) = P([X = 1] \cap [Y = n - 1]) + P([Y = 1] \cap [X = n - 1]).$$

Et d'après 5a) et 5b) :

$$\begin{aligned} P(X + Y = n) &= P([Y = n - 1]) + P([X = n - 1]) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Et en conclusion :

$$P(X + Y = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

7. Informatique.

- (a) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```

1 def simuX():
2     piece = rd.randint(0,3)
3     x=1
4     if piece==0:
5         lancer=rd.random()
6         while lancer >1/2 :
7             lancer=rd.random()
8             x=x+1
9     elif piece==1 :
10         x=0
11     return x

```

- (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 n'est pas pris en compte car si **piece** ne vaut ni 0, ni 1, c'est qu'il vaut 2 et alors on a "pile" du premier coup et **x** reste égal à 1, ce qui est bien la valeur correcte dans ce cas .