
Devoir maison 12 pour le 24/03/2026

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X , égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X = 1)$.
(b) Montrer que : $\forall n \geq 2, P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
(c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.
4. Justifier que Y suit la même loi que X .
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$.
(b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$.
6. Loi de $X + Y$.
(a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
(b) Montrer que $P(X + Y = 1) = \frac{2}{3}$.
(c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1])$$

- (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X + Y = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

7. Informatique.

- (a) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
1 def simuX():
2     piece = rd.randint(....,....)
3     x=1
4     if piece==0:
5         lancer=rd.random()
6         while lancer..... :
7             lancer=...
8             x=...
9     elif piece==1 :
10        x=...
11    return x
```

- (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.