

Devoir maison 13 pour le 27/04/26

Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit l'application f par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P - P(0) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .

Si $\deg P \leq n$, $P(X) - P(0)$ est un polynôme et son degré est inférieur ou égal à n , donc $f(P) \in E$.

Soient P et Q deux polynômes, λ un réel. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \lambda P(X) + \mu Q(X) - \lambda P(0) - \mu Q(0) \\ &= \lambda(P(X) - P(0)) + \mu(Q(X) - Q(0)) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est un endomorphisme de E .

2. Déterminer $\ker f$.

Soit $P \in E$. On a $f(P) = 0$ si et seulement si $P(X) = P(0)$, donc si et seulement si P est constant.

$$\ker f = \mathbb{R}_0[X]$$

3. Déterminer $\text{Im } f$. Donner une base de cet espace.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $f(X^k) = X^k$ et $f(1) = 0$ donc l'image de la base canonique est la base canonique privée de 1, et

$$\text{Im } f = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^n) = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$$

4. Déterminer $f \circ f$. En déduire les espaces caractéristiques de f .

On trouve :

$$\forall P(X) \in E, f(f(P(X))) = f(P(X) - P(0)) = P(X) - P(0) - (P(0) - P(0)) = P(X) - P(0) = f(P(X))$$

et donc

$$f \circ f = f$$

On en déduit que f est un projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.

5. Démontrer que $\text{Im } f$ et $\ker f$ sont supplémentaires.

On a vu à la question précédente que f est un projecteur. Ainsi $\text{Im } f$ et $\ker f$ sont supplémentaires.

Si l'on veut le redémontrer :

— Soit $P \in \ker f \cap \text{Im } f$, on a :

$$\begin{aligned} P \in \ker f \cap \text{Im } f &\iff \begin{cases} P \in \ker f \\ P \in \text{Im}(f) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} P = P(0) \\ P(0) = 0 \end{cases} \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

donc $\ker f \cap \text{Im } f = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$, les espaces $\ker f$ et $\text{Im } f$ sont en somme directe.

- On a montré en question 2 que $\dim(\ker f) = 1$ et en question 3 que $\operatorname{rg}(f) = n$.
Ainsi, par formule de Grassmann,

$$\dim(\ker(f) + \operatorname{Im}(f)) = \dim(\ker f) + \operatorname{rg}(f) - 0 = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

donc

$$\ker(f) + \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_n[X].$$

De plus, la somme est directe donc les espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure d'espace vectoriel. On note

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \end{cases} \right\}$$

et $G = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $v_2 = (2, -1, -1, 1)$

1. Prouver que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et en déterminer une base.

$$\begin{aligned} u = (x, y, z, t) \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -3y - 3z - t = 0 \end{cases} \quad (L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3y - 3z \\ x = -y - z - t = 2y + 2z \end{cases} \Leftrightarrow u = (2y + 2z, y, z, -3y - 3z) \end{aligned}$$

Ainsi $F = \{(2y + 2z, y, z, -3y - 3z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}((2, 1, 0, -3), (2, 0, 1, -3))$. F est donc un sous-espace vectoriel de E dont une famille génératrice est $\{(2, 1, 0, -3), (2, 0, 1, -3)\}$, or ces deux vecteurs étant non colinéaires, la famille est également libre. Ainsi c'est une base de F .

2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Méthode 1 : par concaténation des bases.

Une base de F est $\{v_3, v_4\}$ avec $v_3 = (2, 1, 0, -3)$ et $v_4 = (2, 0, 1, -3)$. De plus v_1 et v_2 n'étant pas colinéaires $\{v_1, v_2\}$ est une base de G . Vérifions donc que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Vérifions déjà que c'est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}^4$, alors :

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 &= (0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (2\lambda_2, -\lambda_2, -\lambda_2, \lambda_2) + (2\lambda_3, \lambda_3, 0, -3\lambda_3) + (2\lambda_4, 0, \lambda_4, -3\lambda_4) &= (0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 - 3\lambda_4) &= (0, 0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \dots \\ \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ est une famille libre à 4 éléments de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Méthode 2 : Dimensions et intersection.

Montrons que $\dim F + \dim G = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ et que $F \cap G = \{0\}$. On a vu que $\dim F = 2$ et

$\dim G = 2$, ainsi $\dim F + \dim G = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$. De plus :

$$\begin{aligned}
u \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} u \in G \\ u \in F \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ u \in F \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, u = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) \\ \begin{cases} (\lambda_1 + 2\lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \\ 2(\lambda_1 + 2\lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, u = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) \\ \begin{cases} 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 = 0 \end{cases} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, u = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow u = (0, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Ainsi $F \cap G = \{0\}$

3. Considérons l'application $s : \begin{cases} \mathbb{R}^4 = F \oplus G & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ a = x_1 + x_2 & \mapsto x_1 - x_2 \end{cases}$ appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G .

- (a) Prouver que s est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$

Soit $u, v \in \mathbb{R}^4$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\exists!(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $u = x_1 + x_2$ et $\exists!(y_1, y_2) \in F \times G$, $v = y_1 + y_2$. Alors $\lambda u + \mu v = \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2$ avec $\lambda x_1 + \mu y_1 \in F$ et $\lambda x_2 + \mu y_2 \in G$. Alors

$$s(u + v) = \lambda x_1 + \mu y_1 - (\lambda x_2 + \mu y_2) = \lambda(x_1 - x_2) + \mu(y_1 - y_2) = \lambda s(u) + \mu s(v)$$

Donc s est une application linéaire.

- (b) Déterminer s^2 et en déduire que s est un automorphisme.

Soit $u = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ alors $s(u) = x_1 - x_2$ avec $x_1 \in F$ et $-x_2 \in G$. Donc $s(s(u)) = x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2 = u$. Ainsi $s^2(u) = u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^4$ et donc $s^2 = id_{\mathbb{R}^4}$. Alors s est un automorphisme de bijection réciproque s .

4. On note p l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + id)$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$. Vérifier que p est un projecteur de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer ses éléments caractéristiques (à l'aide par exemple des notations de la question 3).

p est une application linéaire comme somme d'application linéaire. De plus :

$$\begin{aligned}
p \circ p &= \frac{1}{2}(s + id) \circ \frac{1}{2}(s + id) \\
&= \frac{1}{4}(s \circ s + 2s \circ id + id \circ id) \\
&= \frac{1}{4}(id + 2s + id) \\
&= \frac{1}{4} \times 2(s + id) \\
&= \frac{1}{2}(s + id) = p
\end{aligned}$$

Donc p est idempotent c'est une projection.

De plus : si $u = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, alors

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{1}{2}(s + id)(x_1 + x_2) \\ &= \frac{1}{2}(s(x_1 + x_2) + id(x_1 + x_2)) \\ &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_1 + x_2) \\ &= \frac{1}{2} \times 2x_1 \\ &= x_1 \end{aligned}$$

On reconnaît donc la projection sur F parallèlement à G .

Exercice 3. Capes 2526

1. Préliminaire

Dans tout l'exercice, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne la suite définie par :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{6} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6} \end{cases}$$

Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de p_n en fonction de n .

On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On résout :

$$x = \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = 1$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n - 1$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 1 \\ &= \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6} - 1 \\ &= \frac{5}{6}p_n - \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{6}(p_n - 1) = \frac{5}{6}u_n \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 1 = \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6}$.

Ainsi :

$$u_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} u_1 = -\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\text{Et donc } p_n = u_n + 1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Un joueur dispose N dés classiques à 6 faces. Il effectue un premier lancer des N dés. À l'issue de ce premier lancer, il met de côté les dés ayant donné 6 et relance les autres (s'il en reste). Il continue ainsi avec pour objectif que tous les dés aient donné 6. On note S_n la variable aléatoire donnant le nombre total de dés ayant, après n lancers, donné 6.

Si pour un certain rang n_0 , tous les dés ont donné 6, c'est-à-dire si $S_{n_0} = N$, alors on considérera que $S_n = N$ pour tout entier $n \geq n_0$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser, en justifiant $S_n(\Omega)$.

$S_n(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$ car après n lancers il peut y avoir 0, 1, 2... ou N dés qui ont donné 6.

- (b) Quelle est la loi de S_1 ? (On justifiera)

On lance une première fois l'ensemble des N dés et on compte le nombre de 6. Cela revient à effectuer N expériences de Bernoulli de paramètre $1/6$ et indépendantes : S_1 suit la loi $\mathcal{B}(N, 1/6)$

L'objectif des questions 3 à 5 est d'établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi binomiale de paramètres N et p_n .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, et soit $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Justifier que :

$$P_{S_n=i}(S_{n+1} = k) = \binom{N-i}{k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

$$P_{S_n=i}(S_{n+1} = k) P_{S_n=i}(S_{n+1} - S_n = k - i) = \binom{N-i}{k-i} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-i} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-i-(k-i)}.$$

En effet si $S_n = i$, au lancer $n + 1$ on lance $N - i$ dés, et $S_{n+1} - S_n$ est le nombre de succès obtenus lors de ce lancer : on reconnaît donc une situation "binomiale".

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que S_n suit une loi binomiale de premier paramètre N et de second paramètre p_n .

- (a) Démontrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^k \binom{N}{i} p_n^i (1 - p_n)^{N-i} \binom{N-i}{k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

$\{S_n = i\}_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ est un système complet d'évènement. Par la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^N P(S_n = i \cap S_{n+1} = k) \\ &= \sum_{i=0}^k P(S_n = i \cap S_{n+1} = k) \end{aligned}$$

Car si après n lancers on a déjà i dés qui ont fait 6 et ont été mis de côté après $n + 1$ lancers il y en aura d'avantage donc $P(S_n = i \cap S_{n+1} = k) = 0$ si $i > k$.

Alors par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^k P(S_n = i) P_{S_n=i}(S_{n+1} = k) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{N}{i} p_n^i (1 - p_n)^{N-i} \binom{N-i}{k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \end{aligned}$$

- (b) Vérifier que pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$:

$$\binom{N}{i} \binom{N-i}{k-i} = \binom{N}{k} \binom{k}{i}$$

D'une part :

$$\binom{N}{i} \binom{N-i}{k-i} = \frac{N!}{i!(N-i)!} \times \frac{(N-i)!}{(k-i)!(N-i-(k-i))!} = \frac{N!}{i!(k-i)!(N-k)!}$$

D'autre part :

$$\binom{N}{k} \binom{k}{i} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{N!}{(N-k)!i!(k-i)!}$$

$$\text{Donc } \binom{N}{i} \binom{N-i}{k-i} = \binom{N}{k} \binom{k}{i}$$

(c) Obtenir alors, que pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$:

$$P(S_{n+1} = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1+5p_n}{6} \right)^k \left(1 - \frac{1+5p_n}{6} \right)^{N-k}$$

Par ce qui précède :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^k \binom{N}{i} p_n^i (1-p_n)^{N-i} \binom{N-i}{k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6} \right)^{N-k} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{N}{i} \binom{N-i}{k-i} p_n^i (1-p_n)^{N-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6} \right)^{N-k} \\ &= \left(\frac{5}{6} \right)^{N-k} \sum_{i=0}^k \binom{N}{k} \binom{k}{i} p_n^i (1-p_n)^{N-i} \frac{1}{6^{k-i}} \\ &= \binom{N}{k} \left(\frac{5}{6} \right)^{N-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} p_n^i (1-p_n)^{N-k+k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \\ &= \binom{N}{k} \left(\frac{5}{6} \right)^{N-k} (1-p_n)^{N-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} p_n^i \left(\frac{1-p_n}{6} \right)^{k-i} \\ &= \binom{N}{k} \left(\frac{5(1-p_n)}{6} \right)^{N-k} \left(p_n + \frac{1-p_n}{6} \right)^k \\ &= \binom{N}{k} \left(\frac{5-5p_n}{6} \right)^{N-k} \left(\frac{1+5p_n}{6} \right)^k \\ &= \binom{N}{k} \left(\frac{1+5p_n}{6} \right)^k \left(1 - \frac{1+5p_n}{6} \right)^{N-k} \end{aligned}$$

5. Démontrer par récurrence et grâce aux questions précédentes, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1 - (\frac{5}{6})^n)$

On vient de montrer que si S_n suit une loi binomiale de paramètre N et p_n alors S_{n+1} suit une loi binomiale de paramètre N et $\frac{1+5p_n}{6}$. Or $S_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1/6)$ donc $p_1 = 1/6$. On reconnaît donc la suite étudiée en question 1. Ainsi pour tout $n \geq 1$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1 - (\frac{5}{6})^n)$

Dans la suite de l'exercice, on définit la variable aléatoire T par :

$$T = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^* | S_n = N\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^* | S_n = N\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi T représente le nombre de lancers nécessaires pour que tous les dés aient donné 6, en posant $T = 0$ si on n'obtient jamais tous les 6.

6. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(1 \leq T \leq n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6} \right)^n \right)^N$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $1 \leq T \leq n$ nous dit que le nombre de lancers nécessaires pour que tous les dés aient donné 6 est plus petit ou égal à n donc nécessairement dans ce cas $S_n = N$ et réciproquement si $S_n = N$ alors il aura fallu au plus n lancers pour avoir tous les dés qui auront donné un 6. Donc $P(1 \leq T \leq n) = P(S_n = N) = \left(1 - (\frac{5}{6})^n \right)^N$

7. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k)$ puis démontrer que $P(T = 0) = 0$. Comment interpréter ce résultat ?

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n P(T = k) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} P(1 \leq T \leq n) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

On a alors $P(T = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k) = 0$. On en déduit que l'évènement "ne jamais obtenir l'ensemble des 6" est de probabilité nulle.