
Devoir maison 13 pour le 27/04/26

Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit l'application f par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P - P(0) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\ker f$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$. Donner une base de cet espace.
4. Déterminer $f \circ f$. En déduire les espaces caractéristiques de f .
5. Démontrer que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure d'espace vectoriel. On note

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \end{cases} \right\}$$

et $G = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $v_2 = (2, -1, -1, 1)$

1. Prouver que F est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et en déterminer une base.
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
3. Considérons l'application $s : \begin{cases} \mathbb{R}^4 = F \oplus G & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ a = x_1 + x_2 & \mapsto x_1 - x_2 \end{cases}$ appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G .
 - (a) Prouver que s est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$
 - (b) Déterminer s^2 et en déduire que s est un automorphisme.
4. On note p l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + id)$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$. Vérifier que p est un projecteur de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer ses éléments caractéristiques (à l'aide par exemple des notations de la question 3).

Exercice 3.

1. Préliminaire

Dans tout l'exercice, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne la suite définie par :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{6} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6} \end{cases}$$

Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de p_n en fonction de n .

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Un joueur dispose N dés classiques à 6 faces. Il effectue un premier lancer des N dés. A l'issue de ce premier lancer, il met de côté les dés ayant donné 6 et relance les autres (s'il en reste). Il continue ainsi avec pour objectif que tous les dés aient donné 6. On note S_n la variable aléatoire donnant le nombre total de dés ayant, après n lancers, donné 6.

Si pour un certain rang n_0 , tous les dés ont donné 6, c'est-à-dire si $S_{n_0} = N$, alors on considérera que $S_n = N$ pour tout entier $n \geq n_0$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser, en justifiant $S_n(\Omega)$.

(b) Quelle est la loi de S_1 ? (On justifiera)

L'objectif des questions 3 à 5 est d'établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi binomiale de paramètres N et p_n .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, et soit $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Justifier que :

$$P_{S_n=i}(S_{n+1} = k) = \binom{N-i}{k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que S_n suit une loi binomiale de premier paramètre N et de second paramètre p_n .

(a) Démontrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^k \binom{N}{i} p_n^i (1-p_n)^{N-i} \binom{N-i}{k-i} \frac{1}{6^{k-i}} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}$$

(b) Vérifier que pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$:

$$\binom{N}{i} \binom{N-i}{k-i} = \binom{N}{k} \binom{k}{i}$$

(c) Obtenir alors, que pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$:

$$P(S_{n+1} = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1+5p_n}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1+5p_n}{6}\right)^{N-k}$$

5. Démontrer par récurrence et grâce aux questions précédentes, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n)$

Dans la suite de l'exercice, on définit la variable aléatoire T par :

$$T = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^* | S_n = N\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^* | S_n = N\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi T représente le nombre de lancers nécessaires pour que tous les dés aient donné 6, en posant $T = 0$ si on n'obtient jamais tous les 6.

6. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(1 \leq T \leq n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N$

7. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k)$ puis démontrer que $P(T = 0) = 0$. Comment interpréter ce résultat ?