
Devoir maison 14 pour le 26/05/2026

Exercice 1.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

Soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. (a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x , la relation : $f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$.
(b) Déterminer le sens de variation de f . Dresser son tableau de variation en y faisant figurer les limites calculées aux questions 1 et 2 ainsi que $f(0)$.
(c) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Montrer que pour tout réel x on a : $f''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3}$.
5. Étudier la convexité de f .

Exercice 2.

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et f l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, f(P) = P(X - 2) - 2P(X) + P(X + 1)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E .
3. Déterminer le noyau et l'image de f .