Séance 08 - Couples de variables aléatoires

Exercice 1. ECRICOME 2016. Variables aléatoires échangeables

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i] \cap [Y=j]) = P([X=j] \cap [Y=i])$$

Résultats préliminaires

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi.
   Montrer que X et Y sont échangeables.
2. On suppose que X et Y sont échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X=i) = P(Y=i)$$

Étude d'un exemple

Soient n, b et c trois entiers strictement positifs.
Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches.
On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
  On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
- On replace la boule dans l'urne et :
  - ⋆ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
- On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
  On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.

3. (a) Compléter la fonction Python suivante qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire et 2 si la boule tirée est blanche.

```
def tirage(b,n) :
    r = rd.random()
    if ... :
        return 2
    else :
        return 1
```

   (b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.

```
def experience(b,n,c,variante) :
    x=tirage(b,n)
    if variante == 1 :
        if  x == 1 :
            ...
        else :
            ...
    elif variante == 2 :
        ...
        ...
        ...
        ...
    y = tirage(b,n)
    return [x,y]
```

(c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$) et qui estime la loi de X, la loi de Y et la loi du couple (X, Y).
`LoiX` est un tableau (type `array`) à deux coefficients qui estime $[P(X=1), P(X=2)]$.
`LoiY` est un un tableau (type `array`) à deux coefficients qui estime $[P(Y=1), P(Y=2)]$.
`LoiXY` est une matrice carrée (type `array`) d'ordre 2 qui estime $\begin{pmatrix} P((X=1)\cap(Y=1)) & P((X=1)\cap(Y=2)) \\ P((X=2)\cap(Y=1)) & P((X=2)\cap(Y=2)) \end{pmatrix}$

```
def estimation(b,n,c,variante,N) :
    LoiX = np.array([0,0])
    LoiY = np.array([0,0])
    LoiXY = np.array([[0,0],[0,0]])
    for k in range(N) :
        [x,y] = experience(b,n,c,variante)
        loiX[x-1] = loiX[x-1]+1
        ...
        ...
    return [LoiX/N, LoiY/N, LoiXY/N]
```

On exécute la fonction `estimation` avec les entrées $b = 1, n = 2, c = 1, N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

⋆ Avec la variante 1 :

```
loiX= [0.66981 0.33019]
loiY= [0.665 0.335]
loiXY= [[0.4988 0.1674]
        [0.1629 0.1709]]
```

⋆ Avec la variante 2 :

```
loiX= [0.66958 0.33042]
loiY= [0.587 0.413]
loiXY= [[0.3261 0.3362]
        [0.2555 0.0822]]
```

⋆ Avec la variante 3 :

```
loiX= [0.66889 0.33111]
loiY= [0.68 0.32]
loiXY= [[0.4359 0.2263]
        [0.2279 0.1099]]
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

$0,33 \times 0,33 \approx 0,11$ $\quad 0,33 \times 0,41 \approx 0,14$ $\quad 0,33 \times 0,58 \approx 0,19$ $\quad 0,33 \times 0,66 \approx 0,22$
$0,41 \times 0,66 \approx 0,27$ $\quad 0,58 \times 0,66 \approx 0,38$ $\quad 0,66 \times 0,66 \approx 0,44$

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Déterminer la loi du couple (X, Y).
   (c) Déterminer la loi de Y.
   (d) Montrer que X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.