Programme de colle - Colle n° 8

■ *Applications linéaires* ■

— Définition d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels réels E et F. Savoir montrer qu'une fonction est une application linéaire.

— Une application linéaire $f : E \to F$ vérifie $f(0_E) = 0_F$ et est stable par combinaison linéaires : $f(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(u_i)$. Les images des vecteurs d'une base de E déterminent f.

— Définitions d'un endomorphisme, d'un isomorphisme et d'un automorphisme.

— Définition du noyau d'une application linéaire : $\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E \text{ t.q. } f(u) = 0_F\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E. On a f injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

— Savoir déterminer le noyau d'une application linéaire : résoudre l'équation $f(u) = 0_F$, paramétrer les solutions, puis en déduire une base et la dimension de $Ker(f)$.

— Définition de l'image d'une application linéaire $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{w \in F \text{ t.q. } \exists u \in E,\ f(u) = w\}$.
C'est un sous-espace vectoriel de F. On a f surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

— Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $f : E \to F$ est linéaire, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Savoir extraire une base de cette famille génératrice pour déterminer l'image de f.

— Savoir résoudre $f(u) = w$ pour un vecteur $w \in F$. Il n'y a aucune solution si $w \notin \mathrm{Im}(f)$. Pour u_0 tel que $f(u_0) = w$, les solutions sont de la forme $u_0 + v$ avec $v \in \mathrm{Ker}(f)$.

— Définition du rang d'une application linéaire : $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$.
Connaître le théorème du rang, lorsque E est de dimension finie : $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)$.

— Si $\dim E = \dim F = n$ et $f : E \to F$ est linéaire, alors injectivité, surjectivité, bijectivité et rang maximal ($\mathrm{rg}(f) = n$) sont équivalentes.
Savoir utiliser ces équivalences pour raccourcir les calculs.

— Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. La colonne C_j contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Elle possède $\dim F$ lignes et $\dim E$ colonnes. De plus, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$.

— Savoir passer de l'application linéaire à sa matrice dans des bases et réciproquement. Si X est la colonne des coordonnées de u dans la base de départ et Y celle de v dans la base d'arrivée, alors $f(u) = v$ ssi $Y = AX$.

— Connaître les propriétés sur les matrices d'applications linéaires.
Le produit matriciel correspond entre autres à la composée d'applications linéaires.

— Pour un endomorphisme f, on a, pour tout $k \in \mathbb{P}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^k$.
Si f est bijectif, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$.

— Changement de base pour les endomorphismes : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P$.

— Définition de deux matrices semblables : $B = P^{-1}AP$ avec P inversible.
Elles ont le même rang et vérifient $A^k = PB^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{P}$.

■ *Comparaison de fonctions - Développements limités* ■

— Définition d'une fonction négligeable devant une autre au voisinage d'un point a : si g ne s'annule pas au voisinage de a, $f(x) = o_a(g(x))$ signifie que $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to a} 0$.
Cela revient à écrire $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ au voisinage de a, avec $\varepsilon(x) \to_{x\to a} 0$.

— La notation $o_a(1)$ désigne une fonction qui tend vers zéro en a. Savoir utiliser une relation de négligeabilité pour comparer les termes d'une expression et déterminer ceux qui influencent sa limite.

— Connaître les règles de calcul sur les o, toutes les relations étant prises au même point a : $o_a(g(x)) + o_a(g(x)) = o_a(g(x))$, $o_a(g(x))\,o_a(h(x)) = o_a(g(x)h(x))$, $\lambda\, o_a(g(x)) = o_a(g(x))$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et $o_a(g(x)) = g(x)\,o_a(1)$. Deux symboles $o_a(g(x))$ peuvent désigner des fonctions différentes.

— Savoir enchaîner des négligeabilités : si $f(x) = o_a(g(x))$ et $g(x) = o_a(h(x))$, alors $f(x) = o_a(h(x))$. Vérifier que les fonctions de comparaison ne s'annulent pas au voisinage du point considéré.

— Définition de deux fonctions équivalentes au voisinage de a : si g ne s'annule pas au voisinage de a, $f(x) \sim_a g(x)$ signifie que $\frac{f(x)}{g(x)} \to_{x\to a} 1$.
On a aussi $f(x) \sim_a g(x)$ si et seulement si $f(x) = g(x) + o_a(g(x))$.

— Deux fonctions équivalentes en a ont le même signe au voisinage de a, et la même limite en a si l'une d'elles admet une limite.
Toutes les comparaisons utilisées ensemble doivent être faites au même point.

— Connaître les règles de calcul sur les équivalents : produits, quotients et puissances sont compatibles avec les équivalents, lorsque les expressions sont définies. Les sommes et les compositions (par exp ou ln par exemple) ne le sont pas en général.

— Connaître les croissances comparées. Pour $\alpha, \beta > 0$, on a $(\ln x)^\beta = o_{+\infty}(x^\alpha)$ et $x^\alpha = o_{+\infty}(e^{\beta x})$. En 0^+, on a $x^\alpha |\ln x|^\beta \to_{x \to 0^+} 0$.

Questions de cours :

1. Ecriture de $Im(f)$ à partir d'une base de E. Solutions de l'équation $f(x) = y$ à partir d'une solution particulière et de $Ker(f)$. Preuves de ces deux propriétés.
2. Théorème du rang.
   Conséquence : Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective.
   Preuve de f injective ssi f surjective.
3. Définition de la matrice de f dans les bases B et B', $Mat_{B,B'}(f)$.
   Propriété : Lien entre l'équation $f(x) = y$ et $Mat_{B,B'}.X = Y$.
4. Propriétés pour $Mat_{B,B'}(f+g)$, $Mat_{B,B'}(\lambda f)$, $Mat_{B,B''}(h \circ f)$, $Mat_{B,B'}(f^k)$, $Mat_{B,B'}(f^{-1})$.
   Preuve de : "Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective alors f^{-1} est une application linéaire."
5. Définition de la matrice de passage $P_{B \to B'}$, propriétés, relation de changement de base pour les vecteurs.
   Relation de changement de base pour les applications linéaires.
6. Définition de $f(x) = o_a(g(x))$ et $f(x) \sim_a g(x)$.
   Propriétés de o (proposition 7 du polycopié).