

Exercice 1.

On considère la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Écrire une fonction Python `suite_h` telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de `suite_h(n)` renvoie la valeur de h_n .
2. Étude de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (a) Déterminer le sens de variation de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (b) Démontrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
 - (c) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n \geq \ln(n+1).$$

Déterminer alors la limite de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = h_n - \ln(n), v_n = h_n - \ln(n+1).$$

- (a) À l'aide du résultat de la question précédente, établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

- (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent et qu'elles ont la même limite, que l'on notera γ .
Quelle méthode utiliser ?
 - (c) Établir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1.$$

- (d) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$.
 - (e) Écrire une fonction Python `ApproxGamma(eps)` prenant en argument un réel strictement positif ϵ et renvoyant un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à ϵ .
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

- (a) Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = h_{2n} - h_n.$$

- (b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2).$$

- (c) Conclure que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

```

1. def suite_h (n):
    S = 0
    for k in range (1, n + 1):
        S = S + 1/k
    return S
#Alternative
def suite_h_bis (n):
    L = [1/k for k in range (1, n + 1)]
    return sum(L)

```

2. Étude de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$h_{n+1} - h_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$

Par conséquent, $h_{n+1} \geq h_n$.

Donc, la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

(b) Démontrons que pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

Posons pour cela $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ définie sur $] -1; +\infty[$. La fonction f est une somme de deux fonctions dérivables sur $] -1; +\infty[$, elle l'est donc également et, pour tout $x \in] -1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

On dresse alors un tableau de variations de f sur $] -1; +\infty[$. On a $f' \geq 0$ sur $] -1, 0]$ et $f' \leq 0$ sur $[0, +\infty[$, donc f a un maximum en 0, qui vaut $f(0) = 0$.

Par conséquent, $\forall x \in] -1; +\infty[$, $f(x) \leq 0$.

Conclusion : Pour tout $x \in] -1; +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question précédente, comme $\frac{1}{k} > -1$, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant cette inégalité pour k allant de 1 à n , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Autrement dit, $h_n \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Or, on a :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k))$$

Il s'agit d'une somme télescopique (car $k, k+1 > 0$) :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln(n+1)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \geq \ln(n+1)$.

Enfin, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \geq \ln(n+1)$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

Conclusion : Par théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = +\infty$.

3. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = h_n - \ln(n)$ et $v_n = h_n - \ln(n+1)$.

(a) *Inégalité de gauche :* Remarquons déjà que $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$. Or, d'après le résultat de la question 2.b., avec $x = \frac{1}{n+1}$ (qui est strictement supérieur à -1), on obtient :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \implies \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

Inégalité de droite : Transformons le résultat à obtenir par équivalences :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \iff -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n+1} \iff \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$$

Or, d'après le résultat de la question 2.b., avec $x = \frac{-1}{n+1}$ (qui est strictement supérieur à -1 pour $n > 0$), on obtient :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{-1}{n+1} \iff \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq -\frac{1}{n+1}$$

On obtient donc les inégalités voulues.

(b) Pour cela, démontrons qu'elles sont adjacentes : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = h_{n+1} - \ln(n+1) - (h_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Or, d'après l'inégalité de droite de la question 3.a., $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Conclusion : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

De même, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$v_{n+1} - v_n = h_{n+1} - \ln(n+2) - (h_n - \ln(n+1)) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

Or, d'après l'inégalité de gauche de la question 3.a., $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1}$, donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

Conclusion : La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

De plus, calculons la limite de la différence :

$$u_n - v_n = h_n - \ln(n) - (h_n - \ln(n+1)) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont donc adjacentes.

Conclusion : Les deux suites convergent et ont la même limite, notée γ (appelée constante d'Euler-Mascheroni).

(c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = u_n + \ln(n)$. D'où, pour tout $n \geq 2$ (afin que $\ln(n) \neq 0$) :

$$\frac{h_n}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} + 1$$

Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie γ , d'où par opération $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{\ln(n)} + 1 \right) = 1$$

(d) Puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers γ , elle est majorée par sa limite : $v_n \leq \gamma$. De même, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers γ , elle est minorée par sa limite : $u_n \geq \gamma$.

(e) `import numpy as np`

```
def gamma (p):
    n = 1
    u = 1
    v = 1 - np.log(2)
    while abs(u - v) > p:
        n = n + 1
        h = suite_h(n)
        u = h - np.log(n)
        v = h - np.log(n + 1)
    return v, u
```

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $HR_n : S_n = h_{2n} - h_n$. Démontrons par récurrence que HR_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $S_1 = \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Et $h_2 - h_1 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2}$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que HR_n est vraie, et montrons que $S_{n+1} = h_{2n+2} - h_{n+1}$. On a :

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = h_{2n} - h_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Or, on sait que $h_n = h_{n+1} - \frac{1}{n+1}$, donc :

$$S_{n+1} = h_{2n} - \left(h_{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = h_{2n} - h_{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Comme $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2-1}{2n+2} = \frac{1}{2n+2}$, on obtient :

$$S_{n+1} = h_{2n} - h_{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - h_{n+1} = h_{2n+2} - h_{n+1}$$

Donc HR_{n+1} est vraie. Cela termine la récurrence.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente et la définition de u_n :

$$S_n = h_{2n} - h_n = (u_{2n} + \ln(2n)) - (u_n + \ln(n)) = u_{2n} - u_n + \ln(2n) - \ln(n)$$

$$S_n = u_{2n} - u_n + \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

(c) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2)$. Or, on sait que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers γ , donc sa suite extraite $(u_{2n})_{n \geq 1}$ converge également vers γ . Par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{2n} - u_n) = \gamma - \gamma = 0$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0 + \ln(2) = \ln(2)$.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x.$$

1. Écrire une fonction Python, via `def f(x)`, qui renvoie $f(x)$.
2. Étude de f .
 - (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - (b) Dresser le tableau de variations complet de f et étudier sa convexité.
 - (c) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution réelle α , dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
 - (b) Démontrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$.
 - (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|.$$

Puis, montrer que

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

- (d) Conclure sur la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (e) Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée à 10^{-10} près de α .
On donne : $\ln(10) \simeq 2,303$.
- (f) Créer une fonction Python, via `def u(n)`, renvoyant u_n .
4. Étude d'une seconde suite.
 - (a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations de f^{-1} .

- (b) Écrire une fonction Python nommée `dicho` qui prend un réel strictement positif p en argument et renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à p près par dichotomie.
L'exécution de `dicho(0.01)` renvoie `2.11`.
- (c) Dédurre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n tel que

$$f(x_n) = \frac{1}{n}.$$

- (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0, 3]$.
- (e) Exprimer x_n en fonction de n et de f^{-1} .
- (f) En déduire les variations et la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. `import numpy as np`

```
def f(x):
    y = np.exp(-x) - x**2/2 + x
    return y
```

2. Étude de la fonction f :

(a) En $-\infty$: Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = e^{-x} \left(1 - \frac{x^2}{2e^{-x}} + \frac{x}{e^{-x}} \right)$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2e^{-x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0$. D'où :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

En $+\infty$: On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) = -\infty$. D'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

(b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = -e^{-x} - x + 1 \quad \text{et} \quad f''(x) = e^{-x} - 1$$

Étudions le signe de $f''(x)$:

$$f''(x) \geq 0 \iff e^{-x} - 1 \geq 0 \iff e^{-x} \geq 1 \iff -x \geq 0 \iff x \leq 0$$

Ainsi, $f''(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_-$ et $f''(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $f'(0) = -e^0 - 0 + 1 = 0$. Puisque f' est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle atteint son maximum en 0, qui vaut 0. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leq 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Convexité : f est convexe sur $\mathbb{R}_-$, concave sur $\mathbb{R}_+$, et possède un point d'inflexion en $(0, f(0)) = (0, 1)$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Posons $g(x) = f(x) - x = e^{-x} - \frac{x^2}{2}$. On a ainsi : $f(x) = x \iff g(x) = 0$.

— La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

— Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions strictement décroissantes $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ (ou par dérivation car $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$).

Donc, d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du TVI), g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Puisque $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution réelle, notée α .

Encadrement :

$$g(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$$

$$g(1) = e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} = \frac{2-e}{2e}$$

Comme $e > 2$, on a $2 - e < 0$, donc $g(1) < 0$. On a ainsi $g(0) > 0 > g(1)$. Par stricte décroissance de g , on en déduit que :

$$0 < \alpha < 1$$

3. Étude d'une première suite :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $HR_n : u_n \in [0, 1]$.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, HR_n est vraie.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0 \in [0, 1]$. HR_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que HR_n est vraie, et montrons que HR_{n+1} est vraie ($u_{n+1} \in [0, 1]$).

Par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq 1$. Puisque f est décroissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(0)$$

donc

$$f(1) \leq u_{n+1} \leq f(0)$$

Or $f(0) = 1$ et $f(1) = e^{-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} > 0$. Donc $0 \leq f(1)$ (puisqu'ils sont positifs). Ainsi, $0 \leq u_{n+1} \leq f(1) \leq 1$. Donc HR_{n+1} est vraie. Cela termine la récurrence.

- (b) Soit $x \in [0, 1]$. Puisque f' est décroissante sur $[0, 1]$ (car $f'' \leq 0$), on a :

$$f'(1) \leq f'(x) \leq f'(0)$$

donc

$$-e^{-1} - 1 + 1 \leq f'(x) \leq 0$$

donc

$$-\frac{1}{e} \leq f'(x) \leq 0$$

Par conséquent : $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

- (c) f est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous $x, y \in [0, 1]$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{e} |x - y|$$

En prenant $x = u_n$ et $y = \alpha$ (possible car $u_n \in [0, 1]$ et $\alpha \in [0, 1]$), et sachant que $f(\alpha) = \alpha$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$$

donc

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|$$

Récurrence : Démontrons ensuite par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P_n : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est vraie.

Initialisation : Pour $n = 0$, $|u_0 - \alpha| = |\alpha| = \alpha$ (puisque $\alpha \in [0, 1]$). Or $\alpha \leq 1 = (1/e)^0$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie. Alors :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$$

Donc P_{n+1} est vraie. Cela termine la récurrence.

- (d) Puisque $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$ (car $\frac{1}{e} \in]-1, 1[$), le théorème d'encadrement permet de conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

Donc, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

- (e) On cherche un rang n tel que $\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-10}$:

$$\left(\frac{1}{e}\right)^n \leq 10^{-10} \iff e^{-n} \leq 10^{-10} \iff -n \leq -10 \ln(10) \iff n \geq 10 \ln(10)$$

Comme $10 \ln(10) \simeq 23,03$, le plus petit entier convenable est $n = 24$.

- (f)

```
def u(n):
    val = 0
    for k in range(1, n + 1):
        val = f(val)
    return val
```

4. Étude d'une seconde suite :

- (a) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

```

(b) def dichotomie(p):
    a = 0
    b = 3
    while (b - a) > p:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) == 0:
            a = m
            b = m
        elif f(m) * f(a) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a + b) / 2

```

(c) Puisque $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ et que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un unique antécédent par f . Il existe donc un unique $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_n) = \frac{1}{n}$.

(d) On a $f(x_n) = \frac{1}{n}$. Comme $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc $f(x_n) \in [0, 1]$.
De plus, $f(0) = 1$ et $f(3) = e^{-3} - \frac{9}{2} + 3 < 0$. Ainsi, $f(3) \leq f(x_n) \leq f(0)$. Par stricte décroissance de f , on en déduit que $0 \leq x_n \leq 3$.

(e) Puisque $f(x_n) = \frac{1}{n}$ et que f est bijective, on applique f^{-1} de chaque côté :

$$x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 < n \leq n+1$:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$$

Puis, par décroissance de la bijection réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$ (car f est décroissante), on obtient :

$$f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Donc,

$$x_n \leq x_{n+1}$$

Conclusion : La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Limite : Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et que f^{-1} est continue en 0 (car f est continue), par composition des limites on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = f^{-1}(0)$$

Une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ est 2.11.

Exercice 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

- Justifier l'existence de I_n et J_n .
- Calculer I_0 et I_1 .
- Étudier les variations de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (a) Établir :

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}.$$

- (b) En déduire I_2 .
- (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def I(n)` renvoyant I_n .
- (b) On considère le programme suivant :

```

Labs = .....
Lord = .....
plt.plot(Labs, Lord, 'b+')
plt.show()

```

Recopier et compléter ce programme afin de représenter les termes d'indices 0 à 10 de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) On considère :

```
def seuil(p):  
    n=0  
    while I(n)>p:  
        n=n+1  
    return n
```

Que faudrait-il démontrer sur $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour avoir la garantie que le programme s'arrête pour tout réel strictement positif p ?

6. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la convergence de (I_n) .

7. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

8. (a) Calculer J_0 puis exprimer $J_{n+1} + J_n$.

(b) En déduire J_1 .

9. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

10. (a) Utiliser les questions précédentes pour justifier que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

(b) En déduire la convergence de la série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

et calculer sa somme.

(c) Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = \frac{1}{2}.$$

-
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ sont continues sur $[0, 1]$ comme quotients de fonctions définies continues sur $[0, 1]$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales I_n et J_n existent.

2.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$
$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{1+x-1}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = [\ln(1+x)]_0^1 - I_0 = \ln(2) - \frac{1}{2}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x)^2} dx$$

Or, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x^n \geq 0$, $x - 1 \leq 0$ et $(1 + x)^2 \geq 0$, donc $\frac{x^n(x-1)}{(1+x)^2} \leq 0$.
En intégrant l'inégalité (croissance de l'intégrale) on obtient :

$$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{(1+x)^2} dx \leq 0$$

donc

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

Conclusion : La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} dx + 2 \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x^2 + 2x + 1)}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)^2}{(1+x)^2} dx \\ I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

- (b) D'après la relation précédente au rang $n = 0$, on a :

$$I_2 + 2I_1 + I_0 = \frac{1}{0+1} = 1$$

donc

$$I_2 = 1 - 2I_1 - I_0$$

En remplaçant par les valeurs de I_0 et I_1 trouvées précédemment :

$$I_2 = 1 - 2 \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = 1 - 2 \ln(2) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2 \ln(2)$$

5. (a) `import numpy as np`

```
def I(n):
    if n == 0:
        return 1/2
    if n == 1:
        return np.log(2) - 1/2
    else:
        i = 1/2
        j = np.log(2) - 1/2
        for k in range(2, n + 1):
            next_val = 1/(k - 1) - 2*j - i
            i = j
            j = next_val
        return j
```

- (b) `Labs = list(range(0, 11))`
`Lord = [I(n) for n in Labs]`
`plt.plot(Labs, Lord, 'b+')`
`plt.show()`

- (c) Le programme renvoie le premier rang à partir duquel I_n devient inférieur ou égal à p . Pour s'assurer que la boucle `while` s'arrête pour chaque valeur strictement positive de p , il faudrait démontrer que **la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0**.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$. On a :

$$1 + x \geq 1 \implies (1 + x)^2 \geq 1 \implies \frac{1}{(1 + x)^2} \leq 1$$

Puisque $x^n \geq 0$, on en déduit que :

$$0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

donc

$$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Limite : Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes (théorème d'encadrement) permet de conclure que **la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.**

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $I_n = \int_0^1 x^n \frac{1}{(1+x)^2} dx$. Effectuons une intégration par parties. Posons :

$$\begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = nx^{n-1} \\ v(x) = -\frac{1}{1+x} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I_n &=_{IPP} \left[x^n \left(-\frac{1}{1+x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} \left(-\frac{1}{1+x} \right) dx \\ I_n &= \left(-\frac{1}{2} - 0 \right) + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = -\frac{1}{2} + nJ_{n-1} \end{aligned}$$

8. (a) On a :

$$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité :

$$J_{n+1} + J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

- (b) D'après la relation précédente au rang $n = 0$:

$$J_1 + J_0 = \frac{1}{0+1} = 1$$

ainsi

$$J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln(2)$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n : J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

Initialisation : Pour $n = 1$, le membre de droite vaut :

$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = -1 \left(\ln(2) - \frac{1}{1} \right) = 1 - \ln(2)$$

Or, on a trouvé $J_1 = 1 - \ln(2)$ à la question 8.b. Donc P_n est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n est vraie.

D'après la question 8.a ($J_{n+1} = -J_n + \frac{1}{n+1}$), on a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= - \left[(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \right] + \frac{1}{n+1} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) + \frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}}{n+1} \quad (\text{car } (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} = 1) \end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{n+1}$ et en ajustant le signe, on obtient :

$$= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right) = (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Cela termine la récurrence.

10. (a) D'après la question 7, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$, soit $J_{n-1} = \frac{I_n + \frac{1}{2}}{n}$. En remplaçant $n-1$ par n , on obtient $J_n = \frac{I_{n+1} + \frac{1}{2}}{n+1}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1} + \frac{1}{2}}{n+1} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{+\infty} = 0$$

(b) D'après la question 9, on a $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$. En utilisant la valeur absolue :

$$|J_n| = \left| (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \right| = \left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right|$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$, on a par continuité de la valeur absolue $\lim_{n \rightarrow +\infty} |J_n| = 0$, ce qui implique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

Conclusion : La série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et sa somme vaut $\ln(2)$.

(c) D'après la question 7, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$nJ_n = \frac{n(I_{n+1} + \frac{1}{2})}{n+1} = \frac{n}{n+1} \left(I_{n+1} + \frac{1}{2} \right)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$, on obtient par produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = 1 \times \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Exercice 4.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A - I_3)^2(A + I_3)$.
2. Résoudre les équations $AX = X$ et $AX = -X$ d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. On note

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Résoudre $AX = X + V$. On note W la solution dont la première composante vaut -1 .
- (b) Montrer que (U, V, W) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
- (c) Avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

- (d) Calculer $P^{-1}AP$ et noter T la matrice obtenue.
- (e) On pose

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer N^k pour $k \geq 2$ puis calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(f) En déduire l'expression de A^n .

4. Déduire des questions précédentes l'expression du terme général de la suite définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1,$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_n + u_{n+1} + u_{n+2}.$$

1. On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons d'abord $A - I_3$ et $A + I_3$:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculons ensuite $(A - I_3)^2$:

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplions enfin par $(A + I_3)$:

$$(A - I_3)^2 (A + I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

2. Pour $AX = X \iff (A - I_3)X = 0_{3,1}$: En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système s'écrit par pivot de Gauss :

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de $AX = X$ est $\left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$.

Pour $AX = -X \iff (A + I_3)X = 0_{3,1}$: De même, par résolution de système, on obtient $x = z$ et $y = -z$.

Conclusion : L'ensemble des solutions de $AX = -X$ est $\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$.

3. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) En procédant par la méthode du pivot de Gauss sur le système associé $(A - I_3)X = V$, on trouve l'ensemble des solutions :

$$\left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\}$$

En posant $z = 0$, on obtient la solution dont la première composante est -1 : $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (b) Montrons que la famille (U, V, W) est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $aU + bV + cW = 0_{3,1}$. Cela se traduit par le système :

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ -a + b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2b - c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

La famille (U, V, W) est donc libre.

Comme elle comporte 3 vecteurs et que $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, la famille (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- (c) En appliquant la méthode de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée $(P \mid I_3)$ et en effectuant les opérations sur les lignes ($L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, etc.), on obtient une matrice triangulaire à diagonale non nulle, ce qui prouve que P est inversible, et l'on trouve :

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Par multiplication matricielle directe, on obtient :

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) Posons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $T = D + N$.

— On remarque que $N^2 = 0_3$ (matrice nilpotente d'indice 2) et que $DN = ND$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (avec $n \geq 2$), en appliquant la formule du binôme de Newton (licite car D et N commutent) :

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

Comme $N^k = 0_3$ pour tout $k \geq 2$, il ne reste que les termes pour $k = 0$ et $k = 1$:

$$T^n = D^n + nND^{n-1}$$

Cette formule reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

— **Calcul explicite :**

$$T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) Puisque $T = P^{-1}AP$, on a $A = PTP^{-1}$. On obtient par récurrence (à rédiger!) que $A^n = PT^nP^{-1}$. En effectuant le produit des trois matrices, on obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n - 2n + 3 & 2(-1)^{n-1} + 2 & (-1)^n + 2n - 1 \\ (-1)^n - 2n + 1 & 2(-1)^n + 2 & (-1)^{n+1} + 2n + 1 \\ 1 - 2n - 1 & 2(-1)^{n-1} + 2 & (-1)^n + 2n + 3 \end{pmatrix}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. La relation de récurrence vérifiée par u_n implique que $X_{n+1} = AX_n$.

On reconnaît une suite géométrique (matricielle), ce qui implique que $X_n = A^n X_0$. En utilisant l'expression de A^n et

le vecteur initial $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la première ligne de X_n nous donne directement :

$$u_n = (-1)^n + 2n - 1$$

Exercice 5.

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$, avec $p \in]0, 1[$.

- On réalise des tirages avec remise jusqu'à obtenir la première boule noire.
On note T le nombre de tirages et U le nombre de boules blanches obtenues.
 - Reconnaître la loi de T . Donner son espérance et sa variance.
 - Exprimer U en fonction de T . En déduire son espérance et sa variance.
- On réalise des tirages avec remise jusqu'à l'obtention d'au moins une boule de chaque couleur.

On note X le nombre de tirages effectués, Y le nombre de boules blanches obtenues et Z le nombre de boules noires obtenues.

- Écrire une fonction Python `TirageChaqueCouleur(p)` prenant p en argument et renvoyant une réalisation de X .
- Loi de X .
 - Donner $X(\Omega)$.
 - Montrer que pour tout $k \geq 2$:

$$P(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}.$$

iii. Vérifier que la somme de ces probabilités vaut 1.

iv. Montrer que

$$E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

(c) Loi de Y .

i. Pour $k \geq 2$, déterminer

$$P([X = k] \cap [Y = 1]).$$

On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.

ii. En déduire

$$P(Y = 1) = q(1 + p).$$

iii. Déterminer la loi de Y .

(d) Donner la loi de Z .

1. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

(a) *Expérience* : L'expérience s'assimile à une infinité de répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli dont le succès, « obtenir une boule noire », a pour probabilité q .

Variable aléatoire : T prend comme valeur le rang du premier succès.

Conclusion : T suit la loi géométrique de paramètre q (notée $\mathcal{G}(q)$), et l'on a :

$$E(T) = \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{p}{q^2}$$

- (b) Puisque U prend comme valeur le nombre de boules blanches obtenues avant d'obtenir la première boule noire (qui met fin aux tirages), on a :

$$U = T - 1$$

La variable aléatoire U admet donc une espérance et une variance, comme combinaison linéaire de variables aléatoires qui en admettent. Par linéarité de l'espérance et propriétés de la variance :

$$E(U) = E(T - 1) = E(T) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{1 - q}{q} = \frac{p}{q}$$

$$V(U) = V(T - 1) = V(T) = \frac{p}{q^2}$$

2. Dans cette question, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule de chaque couleur. On note X le nombre de tirages, Y le nombre de boules blanches, et Z le nombre de boules noires.

(a) `import random`

```
def mystere(p):  
    n = 1  
    while random.random() < 1 - p:  
        n = n + 1  
    return n
```

(b) Loi de X :

i.

$$X(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$$

- ii. Soit $k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. L'événement $[X = k]$ est réalisé si et seulement si on obtient la deuxième couleur de boule pour la première fois au k -ième tirage, c'est-à-dire si et seulement si les tirages 1 à $k - 1$ ont donné la même couleur et le k -ième tirage a donné l'autre couleur. Autrement dit, soit les tirages 1 à $k - 1$ ont donné une boule blanche et le k -ième tirage une boule noire, soit les tirages 1 à $k - 1$ ont donné une boule noire et le k -ième tirage une boule blanche. On a donc :

$$[X = k] = (B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)$$

Par incompatibilité des deux événements, et par mutuelle indépendance des événements (tirages avec remise) :

$$P([X = k]) = P((B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) \cup (N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k))$$

$$P([X = k]) = P(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p = qp^{k-1} + pq^{k-1}$$

iii. On a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P([X = k]) = \sum_{k=2}^{+\infty} (qp^{k-1} + pq^{k-1}) = \sum_{i=1}^{+\infty} (qp^i + pq^i) = q \sum_{i=1}^{+\infty} p^i + p \sum_{i=1}^{+\infty} q^i$$

En exprimant les sommes à l'aide des séries géométriques convergentes (car $p, q \in]0, 1[$) :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P([X = k]) = q \left(\sum_{i=0}^{+\infty} p^i - 1 \right) + p \left(\sum_{i=0}^{+\infty} q^i - 1 \right) = q \left(\frac{1}{1-p} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right)$$

Comme $1 - p = q$ et $1 - q = p$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P([X = k]) = q \left(\frac{1}{q} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = (1 - q) + (1 - p) = q + p = 1$$

iv. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \in X(\Omega)} kP([X = k])$ est absolument convergente (donc convergente car les termes sont positifs). Pour tout $N \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^N kP([X = k]) = \sum_{k=2}^N k(qp^{k-1} + pq^{k-1}) = q \sum_{k=2}^N kp^{k-1} + p \sum_{k=2}^N kq^{k-1}$$

Comme $p, q \in]0, 1[$, les séries $\sum_{k \geq 2} kp^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 2} kq^{k-1}$ sont des troncatures de séries géométriques dérivées convergentes. Par conséquent, la série $\sum_{k \geq 2} kP([X = k])$ est convergente, ce qui prouve que X admet une espérance. De plus :

$$\begin{aligned} E(X) &= q \sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} + p \sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} = q \left(\sum_{i=1}^{+\infty} ip^{i-1} - 1 \right) + p \left(\sum_{i=1}^{+\infty} iq^{i-1} - 1 \right) \\ &= q \left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1 \right) = q \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right) + p \left(\frac{1}{p^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{q} - q + \frac{1}{p} - p = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - (p + q) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1 \end{aligned}$$

(c) Loi de Y :

i. Si $k = 2$: L'événement $[X = 2] \cap [Y = 1]$ est réalisé si et seulement si on a tiré deux boules dont une blanche, c'est-à-dire (on tire une blanche puis une noire) ou (on tire une noire puis une blanche) :

$$[X = 2] \cap [Y = 1] = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$$

Par incompatibilité et indépendance :

$$P([X = 2] \cap [Y = 1]) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = pq + qp = 2pq$$

Si $k \geq 3$: L'événement $[X = k] \cap [Y = 1]$ est réalisé si et seulement si on a tiré k boules dont une seule blanche, et cette unique boule blanche ne peut être qu'au k -ième tirage (sinon la deuxième couleur aurait été obtenue avant). Autrement dit, les tirages 1 à $k - 1$ ont donné une boule noire et le tirage k donne une boule blanche :

$$[X = k] \cap [Y = 1] = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$$

Par indépendance des événements :

$$P([X = k] \cap [Y = 1]) = q^{k-1}p$$

Conclusion : Pour $k = 2$, $P([X = 2] \cap [Y = 1]) = 2pq$ et pour $k \geq 3$, $P([X = k] \cap [Y = 1]) = q^{k-1}p$.

ii. D'après la formule des probabilités totales, avec $([X = k])_{k \geq 2}$ comme système complet d'événements, la série $\sum_{k \geq 2} P([X = k] \cap [Y = 1])$ est convergente et :

$$P([Y = 1]) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = 1]) = P([X = 2] \cap [Y = 1]) + \sum_{k=3}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = 1])$$

$$P([Y = 1]) = 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + p \sum_{i=2}^{+\infty} q^i = 2pq + p \left(\sum_{i=1}^{+\infty} q^i - q \right)$$

$$P([Y = 1]) = 2pq + p \left(\frac{q}{1-q} - q \right) = 2pq + p \left(\frac{q}{p} - q \right) = 2pq + q - pq = pq + q = q(p + 1)$$

- iii. Puisque l'événement « n'obtenir que des boules noires » est impossible, on peut considérer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
On a déjà $P([Y = 1]) = q(1 + p)$. Soit ensuite $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. L'événement $[Y = n]$ est réalisé si et seulement si on obtient n blanches à la fin du jeu, c'est-à-dire que les tirages 1 à n ont donné une boule blanche et le $(n + 1)$ -ième tirage a donné une boule noire :

$$[Y = n] = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \cap N_{n+1}$$

Par indépendance des événements (tirages avec remise) :

$$P([Y = n]) = p^n q$$

- (d) Loi de Z :

En échangeant les rôles des boules noires et blanches, on échange Y et Z (ainsi que p et q).

Conclusion : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $P([Z = 1]) = p(1 + q)$, et pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, $P([Z = n]) = q^n p$.

Exercice 6.

Dans tout l'exercice, on considère $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y , suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre p .

1. On pose $Z = \min(X, Y)$.

- (a) Pour tout entier naturel k , calculer $P(Z > k)$.

- (b) Établir :

$$P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k).$$

- (c) En déduire que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

2. On définit la variable aléatoire T par

$$T(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair,} \\ \frac{1 + X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est impair.} \end{cases}$$

- (a) Expliquer soigneusement ce que renvoie la fonction Python suivante :

```
import numpy.random as rd

def mystere(p):
    n=1
    while rd.random()<=1-p:
        n=n+1
    return n
```

- (b) Écrire une fonction Python `VariableT(p)` qui prend en entrée p et renvoie une réalisation de T .

- (c) Montrer que T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- (d) Justifier que tout entier strictement positif appartient à $T(\Omega)$.

- (e) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[T = k]$ à l'aide d'événements de la forme $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z .

1. On pose $Z = \min(X, Y)$ où X et Y sont indépendantes et suivent la même loi géométrique de paramètre p .

- (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition de la variable aléatoire $Z = \min(X, Y)$, l'événement $[Z > k]$ est réalisé si et seulement si les deux variables X et Y sont strictement supérieures à k :

$$[Z > k] = [\min(X, Y) > k] = [X > k] \cap [Y > k]$$

Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a :

$$P([Z > k]) = P([X > k] \cap [Y > k]) = P([X > k])P([Y > k]) = (P([X > k]))^2$$

Or, par définition de la loi géométrique de X (avec $q = 1 - p$), l'événement $[X > k]$ s'écrit comme l'union disjointe des événements $[X = i]$ pour i allant de $k + 1$ à $+\infty$:

$$[X > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]$$

Par incompatibilité de ces événements et par convergence de la série géométrique (car $p, q \in]0, 1[$), on obtient :

$$P([X > k]) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P([X = i]) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} q^{i-1} p$$

En effectuant le changement d'indice $j = i - (k + 1)$ (soit $i = j + k + 1$), on a :

$$P([X > k]) = \sum_{j=0}^{+\infty} q^{j+k} p = pq^k \sum_{j=0}^{+\infty} q^j = pq^k \left(\frac{1}{1-q} \right)$$

Comme $1 - q = p$, il vient :

$$P([X > k]) = pq^k \left(\frac{1}{p} \right) = q^k$$

En remplaçant ce résultat dans l'expression de $P([Z > k])$, on obtient :

$$P([Z > k]) = (q^k)^2 = (q^2)^k$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a l'union disjointe suivante traduisant l'inclusion d'événements :

$$[Z \geq k] = [Z = k] \cup [Z > k]$$

Les événements $[Z = k]$ et $[Z > k]$ étant incompatibles, on en déduit par addition des probabilités :

$$P([Z \geq k]) = P([Z = k]) + P([Z > k])$$

donc

$$P([Z = k]) = P([Z \geq k]) - P([Z > k])$$

De plus, comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. En particulier, Z est à valeurs entières, ce qui permet d'écrire l'égalité :

$$[Z \geq k] = [Z > k - 1]$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P([Z = k]) = P([Z > k - 1]) - P([Z > k])$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les résultats des deux questions précédentes (valable pour $k = 1$ en convenant que $P([Z > 0]) = 1$) :

$$P([Z = k]) = P([Z > k - 1]) - P([Z > k]) = (q^2)^{k-1} - (q^2)^k$$

En factorisant par $(q^2)^{k-1}$, il vient :

$$P([Z = k]) = (q^2)^{k-1} (1 - q^2)$$

Puisque $q \in]0, 1[$, on a $q^2 \in]0, 1[$, donc $1 - q^2 \in]0, 1[$. On reconnaît la forme caractéristique d'une loi géométrique.

Conclusion : Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

2. On définit la variable aléatoire T par : $T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$ si $X(\omega)$ est pair, et $T(\omega) = \frac{1+X(\omega)}{2}$ si $X(\omega)$ est impair.

(a) La variable n débute à 1 puis est incrémentée à chaque répétition de la boucle `while`. La commande `random.random()` renvoie un réel aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1[$; par conséquent, les lignes modélisent des répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli dont l'échec est de probabilité $1 - p$, donc le succès est de probabilité p . La boucle s'arrête dès l'obtention du premier succès.

Conclusion : La fonction `mystere` renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

(b) `import random`

```
def simulT(p):
    X = mystere(p)
    if X % 2 == 0:
        return X / 2
    else:
        return (1 + X) / 2
```

(c) Montrons que pour tout $\omega \in \Omega$, $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas :

— Si $X(\omega)$ est pair : Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel non nul k tel que $X(\omega) = 2k$. Alors :

$$T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

Comme $k \in \mathbb{N}^*$, on a bien $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$.

— Si $X(\omega)$ est impair : Il existe un entier naturel k tel que $X(\omega) = 2k + 1$. Alors :

$$T(\omega) = \frac{1 + X(\omega)}{2} = \frac{1 + 2k + 1}{2} = \frac{2k + 2}{2} = k + 1$$

Comme $k \in \mathbb{N}$, on a $k + 1 \in \mathbb{N}^*$, donc $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$.

Dans tous les cas, $T(\omega) \in \mathbb{N}^*$.

- (d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $k \in T(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) = k$. On a $2k \in \mathbb{N}^*$. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, il existe $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = 2k$. Pour cette issue, comme $X(\omega)$ est pair, on a :

$$T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

On a donc établi l'inclusion $\mathbb{N}^* \subset T(\Omega)$. Conjuguée à l'inclusion réciproque démontrée à la question précédente ($T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$), on conclut que :

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

- (e) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[T = k]$ est réalisé si et seulement si $X(\omega) = 2k$ ou $X(\omega) = 2k - 1$:

$$[T = k] = [X = 2k] \cup [X = 2k - 1]$$

Les événements $[X = 2k]$ et $[X = 2k - 1]$ étant incompatibles, on a par additivité de la probabilité :

$$P([T = k]) = P([X = 2k]) + P([X = 2k - 1])$$

En utilisant la loi géométrique de X (où $P([X = i]) = q^{i-1}p$) :

$$P([T = k]) = q^{2k-1}p + q^{2k-2}p = q^{2k-2}p(q + 1)$$

En écrivant $p = 1 - q$, on a $p(q + 1) = (1 - q)(1 + q) = 1 - q^2$, d'où :

$$P([T = k]) = (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$$

On reconnaît exactement la loi de Z établie à la question 1.c.