

Exercice 1.

On considère la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Écrire une fonction Python `suite_h` telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'exécution de `suite_h(n)` renvoie la valeur de h_n .
2. Étude de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (a) Déterminer le sens de variation de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - (b) Démontrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
 - (c) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, h_n \geq \ln(n+1).$$

Déterminer alors la limite de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = h_n - \ln(n), v_n = h_n - \ln(n+1).$$

- (a) À l'aide du résultat de la question précédente, établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

- (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent et qu'elles ont la même limite, que l'on notera γ .
Quelle méthode utiliser ?
- (c) Établir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h_n}{\ln(n)} = 1.$$

- (d) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma \leq u_n$.
- (e) Écrire une fonction Python `ApproxGamma(eps)` prenant en argument un réel strictement positif ϵ et renvoyant un encadrement de γ d'amplitude inférieure ou égale à ϵ .
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

- (a) Montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = h_{2n} - h_n.$$

- (b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = u_{2n} - u_n + \ln(2).$$

- (c) Conclure que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} - \frac{x^2}{2} + x.$$

1. Écrire une fonction Python, via `def f(x)`, qui renvoie $f(x)$.
2. Étude de f .
 - (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - (b) Dresser le tableau de variations complet de f et étudier sa convexité.
 - (c) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution réelle α , dont on donnera un encadrement entre deux entiers consécutifs.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
 - (b) Démontrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{e}$.
 - (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|.$$

Puis, montrer que

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

- (d) Conclure sur la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (e) Déterminer un rang à partir duquel u_n est une valeur approchée à 10^{-10} près de α .
On donne : $\ln(10) \simeq 2,303$.
 - (f) Créer une fonction Python, via `def u(n)`, renvoyant u_n .
4. Étude d'une seconde suite.
 - (a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. Dresser le tableau de variations de f^{-1} .
 - (b) Écrire une fonction Python nommée `dicho` qui prend un réel strictement positif p en argument et renvoie une valeur approchée de $f^{-1}(0)$ à p près par dichotomie.
L'exécution de `dicho(0.01)` renvoie `2.11`.
 - (c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n tel que

$$f(x_n) = \frac{1}{n}.$$

- (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0, 3]$.
 - (e) Exprimer x_n en fonction de n et de f^{-1} .
 - (f) En déduire les variations et la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

1. Justifier l'existence de I_n et J_n .
2. Calculer I_0 et I_1 .
3. Étudier les variations de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. (a) Établir :

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}.$$

- (b) En déduire I_2 .
5. (a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def I(n)` renvoyant I_n .
- (b) On considère le programme suivant :

```
Labs = .....  
Lord = .....  
plt.plot(Labs, Lord, 'b+')  
plt.show()
```

Recopier et compléter ce programme afin de représenter les termes d'indices 0 à 10 de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (c) On considère :

```
def seuil(p):  
    n=0  
    while I(n)>p:  
        n=n+1  
    return n
```

Que faudrait-il démontrer sur $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour avoir la garantie que le programme s'arrête pour tout réel strictement positif p ?

6. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la convergence de (I_n) .

7. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

8. (a) Calculer J_0 puis exprimer $J_{n+1} + J_n$.

(b) En déduire J_1 .

9. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

10. (a) Utiliser les questions précédentes pour justifier que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

(b) En déduire la convergence de la série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

et calculer sa somme.

(c) Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nJ_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A - I_3)^2(A + I_3)$.
2. Résoudre les équations $AX = X$ et $AX = -X$ d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. On note

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Résoudre $AX = X + V$. On note W la solution dont la première composante vaut -1 .
- (b) Montrer que (U, V, W) est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
- (c) Avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .

- (d) Calculer $P^{-1}AP$ et noter T la matrice obtenue.
- (e) On pose

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer N^k pour $k \geq 2$ puis calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (f) En déduire l'expression de A^n .

4. Déduire des questions précédentes l'expression du terme général de la suite définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1,$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_n + u_{n+1} + u_{n+2}.$$

Exercice 5.

Une urne contient des boules blanches en proportion p et des boules noires en proportion $q = 1 - p$, avec $p \in]0, 1[$.

1. On réalise des tirages avec remise jusqu'à obtenir la première boule noire.
On note T le nombre de tirages et U le nombre de boules blanches obtenues.
 - (a) Reconnaître la loi de T . Donner son espérance et sa variance.
 - (b) Exprimer U en fonction de T . En déduire son espérance et sa variance.
2. On réalise des tirages avec remise jusqu'à l'obtention d'au moins une boule de chaque couleur.

On note X le nombre de tirages effectués, Y le nombre de boules blanches obtenues et Z le nombre de boules noires obtenues.

- (a) Écrire une fonction Python `TirageChaqueCouleur(p)` prenant p en argument et renvoyant une réalisation de X .

(b) Loi de X .

i. Donner $X(\Omega)$.

ii. Montrer que pour tout $k \geq 2$:

$$P(X = k) = qp^{k-1} + pq^{k-1}.$$

iii. Vérifier que la somme de ces probabilités vaut 1.

iv. Montrer que

$$E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

(c) Loi de Y .

i. Pour $k \geq 2$, déterminer

$$P([X = k] \cap [Y = 1]).$$

On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.

ii. En déduire

$$P(Y = 1) = q(1 + p).$$

iii. Déterminer la loi de Y .

(d) Donner la loi de Z .

Exercice 6.

Dans tout l'exercice, on considère $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y , suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre p .

1. On pose $Z = \min(X, Y)$.

(a) Pour tout entier naturel k , calculer $P(Z > k)$.

(b) Établir :

$$P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k).$$

(c) En déduire que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

2. On définit la variable aléatoire T par

$$T(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair,} \\ \frac{1 + X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est impair.} \end{cases}$$

(a) Expliquer soigneusement ce que renvoie la fonction Python suivante :

```
import numpy.random as rd

def mystere(p):
    n=1
    while rd.random()<=1-p:
        n=n+1
    return n
```

(b) Écrire une fonction Python `VariableT(p)` qui prend en entrée p et renvoie une réalisation de T .

(c) Montrer que T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(d) Justifier que tout entier strictement positif appartient à $T(\Omega)$.

(e) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $[T = k]$ à l'aide d'événements de la forme $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z .