

F O R M U L A I R E D E M A T H É M A T I Q U E S

Identités remarquables

Valables pour des entiers, réels, complexes, fonctions, polynômes, matrices qui commutent.

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Formule du binôme

- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Techniques usuelles

- $a = a + b - b$ [”+1 -1”]
- $a = \frac{a \times b}{b}$ (si $b \neq 0$) [” $\times 1$ /1”]
- $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ [Transformer une égalité en un zéro]
- $f \leq g \Leftrightarrow 0 \leq g - f$ [Transformer une comparaison en étude de signe]
- Tester pour $n = 0, 1, 2, 3$, pour $x = 0, 1, -1, 2, -2$, pour $f(x) = x^2, x^n, \exp$. [Prendre des exemples]
- Faire un petit dessin au brouillon (cercle trigonométrique, géométrie, vecteurs, courbe de fonction,...)

Somme arithmétique, Somme géométrique

- $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=0}^n \lambda = \lambda \cdot (n+1)$.
- $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$, et $n+1$ si $a = 1$.

Techniques usuelles 2

- Factoriser une somme par le terme dominant (pour $n \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0$)
- $a = \sqrt{a^2}$ (si $a \geq 0$).
- $\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{a^2-b^2}$ [Multiplier par la quantité conjuguée]
- $a = \exp(\ln(a))$ (si $a > 0$) [Utiliser l'exponentielle du logarithme]
 $a^x = \exp(x \ln(a))$.
- $ab = 0$ ssi $a = 0$ ou $b = 0$ [Equation produit nul]

- On a $a+b=0$ avec $a, b \geq 0$ ssi $a=b=0$. [Somme de positifs nulle]
- Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
Une matrice est nulle ssi tous ses coefficients sont nuls.
Un vecteur est nul ssi tous ses coefficients sont nuls.

Propriétés des fonctions usuelles

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (si $a, b \geq 0$).
- $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ (pour $a, b \neq 0$)
- $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$, $x^{ab} = (x^a)^b$, $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ (pour $x > 0$).
- $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$, $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$, $\exp(na) = \exp(a)^n$.
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$, $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$ (si $a, b > 0$).
- $|ab| = |a| \cdot |b|$, $|a+b| \leq |a| + |b|$. [Inégalité triangulaire]

Rédaction

- Règles d'orthographe : masculin/féminin, singulier/pluriel, conjugaison au présent, confusions entre homophones (et/est, a/à, ou/où, -é/-er, -e/-ent).
Les mathématiques demandent d'avoir un français de base correct. Le monde professionnel aussi.

Logique, Raisonnements

- Pour P, Q des propositions, $P \Leftrightarrow Q$ ssi $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. [Double implication]
Pour A, B des ensembles, on a $A = B$ ssi $A \subset B$ et $B \subset A$. [Double inclusion]
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x = y$ ssi $x \leq y$ et $y \leq x$. [Double inégalité]
- $[\forall x \in E, P(x) \text{ est vraie}]$ Soit $x \in E$. On a ... Donc $P(x)$ est vraie.
- [Contre-exemple] Si l'on détermine $x \in E$ tel que $P(x)$ est fausse, alors " $\forall x \in E, P(x)$ est vraie." est fausse.
- [Disjonction de cas] Pour démontrer " $\forall x \in E, P(x)$ est vraie", on peut séparer la preuve sur des sous-ensembles E_1, E_2 tels que $E_1 \cup E_2 = E$.
- [Existence] Pour démontrer " $\exists x \in E$, t.q. $P(x)$ vraie", on détermine manuellement un $x_0 \in E$ qui convient, ou bien on utilise un théorème d'existence.
- [Unicité] Soient $x, y \in E$ tels que $P(x)$ et $P(y)$ sont vraies. Si l'on montre que $x = y$, alors la proposition $P(\cdot)$ est vraie pour au plus un seul élément x .
- [Récurrence forte] Initialisation : On montre que HR_0 est vraie.
Hérédité : Soit $n \geq 0$ tel que $HR_0, \dots, HR_n$ sont vraies. On montre que HR_{n+1} est vraie. Donc, pour tout $k \geq 0$, HR_k est vraie.
Il y a besoin d'une relation de récurrence entre HR_{n+1} et $HR_0, \dots, HR_n$.
- [Contraposée] Pour P, Q des propositions, on a $P \Rightarrow Q$ ssi $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$
- [Absurde] On suppose que P est fausse. Si l'on obtient une contradiction, alors on en déduit que P est vraie.

Factorielle, Coefficients binomiaux

- $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$.
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$. Exemples avec le triangle de Pascal.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Sommes, Produits

- $\sum_{k=a}^b x_k = x_a + x_{a+1} + x_{a+2} + \dots + x_b$ (si $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$)
- $\prod_{k=a}^b x_k = x_a \times x_{a+1} \times \dots \times x_b$ (si $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$)
- $\sum_{k=a}^b \lambda x_k = \lambda \left(\sum_{k=a}^b x_k \right)$ [Factorisation de somme]
- $\sum_{k=a}^b (x_k + y_k) = \sum_{k=a}^b x_k + \sum_{k=a}^b y_k$ [Développement de somme]
- $\sum_{k=a}^b x_k = \sum_{l=0}^{b-a} x_{l+a}$, pour $l = k - a$ [Changement de variable]
- $\prod_{k=a}^b \lambda x_k = \lambda^{b-a+1} \left(\prod_{k=a}^b x_k \right)$ [Factorisation de produit]
- $\prod_{k=a}^b (x_k \times y_k) = \left(\prod_{k=a}^b x_k \right) \times \left(\prod_{k=a}^b y_k \right)$ [Développement de produit]

Manipulation d'inégalités

- $x \leq y$ si et seulement si $x + a \leq y + a$.
- $x \leq y$ si et seulement si $ax \leq ay$, pour $a > 0$.
- $x \leq y$ si et seulement si $ax \geq ay$, pour $a < 0$.
- Si $0 < x \leq y$, alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.
- Si $x \leq y$ et si f est une fonction croissante entre x et y , alors $f(x) \leq f(y)$.
Si $x \leq y$ et si f est une fonction décroissante entre x et y , alors $f(x) \geq f(y)$.
[Inégalités et croissance/décroissance]

Notations pour ensembles

- $x \in E$: l'élément x appartient à l'ensemble E .
- $F \subset E$: l'ensemble F est inclus dans l'ensemble E .
- $E \cup F$: la réunion des ensembles E et F .
- $E \cap F$: l'intersection des ensembles E et F .
- $\{a, b, c\}$: l'ensemble des éléments a, b , et c .

- $[a, b]$: l'ensemble de tous les nombres réels compris entre a et b .
Intervalle $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $] - \infty, a]$, $]a, +\infty[$.

Ensembles de nombres usuels

- $\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels (n entier, $n \geq 0$)
- $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs (n entier)
- $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux (écriture décimale finie)
Un nombre décimal est de la forme $x = \frac{n}{10^d}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels (écriture décimale périodique à partir d'un moment). Un nombre rationnel s'écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$.
- $\mathbb{R}$: ensemble de tous les nombres réels.
Les nombres réels sont tous les nombres qui constituent la droite numérique.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, et $-1 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Matrices

- $AB = (c_{i,j})_{i,j}$ avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^q a_{i,k} b_{k,j}$, $A \in M_{p,q}$, $B \in M_{q,r}$, $AB \in M_{p,r}$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,k} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & & \dots & c_{1,r} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & \boxed{c_{i,j}} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{p,1} & \dots & & \dots & c_{p,r} \end{pmatrix}$$

↓

- A est inversible si on a B telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ (dans $M_n(\mathbb{R})$).
Multiplier par A^{-1} correspond à "diviser" par A .
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$ (si A, B inversibles).
- L'inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, il existe ssi $ad - bc \neq 0$.
- A et B commutent si $AB = BA$. Permet d'appliquer les identités remarquables et la formule du binôme.

- Méthode du Pivot : Résoudre $AX = Y$ (d'inconnue X) ; déterminer $\text{Ker}(A)$ (résoudre $AX = 0$) ; calculer le rang de A .
Trois opérations sur les lignes : $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n . Base canonique :
 $B = ((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$.
- Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est de la forme $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$.
- Pour F de dimension p : Une famille libre a au plus p vecteurs, et une famille génératrice de F a au moins p vecteurs.
- Famille de p vecteurs en dimension p : Famille libre ssi génératrice ssi base.
- Méthode du Pivot : Montrer qu'un ensemble F est un sous-ev (obtenir $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$) ; déterminer si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre ; calculer $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ et trouver une base de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
- $F \subset E$ et $\dim(F) = \dim(E)$ ssi $F = E$.

Fonctions polynomiales

- $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ (écriture avec les coefficients).
- $\deg(P) = \max(\{k \text{ t.q. } a_k \neq 0\})$, $\deg(X^n) = n$, $\deg(0) = -\infty$. [Degré]
 $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \leq n\}$.
- $\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$, $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- B divise A s'il existe Q fonction polynômiale telle que $A(X) = B(X)Q(X)$.
- $(X - a)$ divise P ssi $P(a) = 0$.
- On trouve les racines de $a_0 + a_1X + a_2X^2$ en cherchant les racines carrées de $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0$. [Degré 2 et discriminant]
- Un polynôme de degré au plus n possède au plus n racines, ou bien est le polynôme nul.

Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

- $\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\}$, $\text{Im}(f) = f(\mathbb{R}^n)$, $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.
Pour $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(X \mapsto AX) = \{X \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } AX = 0_{\mathbb{R}^m}\}$,
 $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_n) = \text{rg}(X \mapsto AX)$. (avec $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A)
 $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.
Pour $(x_1, \dots, x_n)$ base de $\mathbb{R}^n$, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_n))$ et $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(x_1), \dots, f(x_n))$.
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(^tA)$.

- Pour E un espace vectoriel, $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$. [Théorème du rang]
- Méthode du Pivot : Déterminer $\text{Ker}(f)$; calculer $\text{rg}(f)$ et trouver une base de $\text{Im}(f)$; calculer l'inverse de u ou d'une matrice P .

Dérivées

- $(x^a)' = ax^{a-1}$, $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, $\exp' = \exp$
- $ch' = sh$, $sh' = ch$ (avec $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$)

Dérivées 2

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(\lambda u)' = \lambda \times u'$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$
- $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$
- $(\exp(u))' = u' \exp(u)$
- $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$, $(u^a)' = au'(u)^{a-1}$.
- $f' = 0$ sur $]a, b[\Leftrightarrow f$ est constante sur $]a, b[$.

Intégrales

- $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, (si F une primitive de f)
 $\int_a^b f(t)dt = f(b) - f(a)$ [Newton-Leibniz]
- $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ [Chasles]
- $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$ [Intégration par parties]
- $\int_a^b f(v(t))v'(t)dt = \int_{v(a)}^{v(b)} f(u)du$, en posant $u = v(t)$, $du = v'(t)dt$ [Changement de variables]
- Si $f \geq 0$, f continue, et $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$.

Dérivées et primitives usuelles

Domaine	Primitive F	Fonction f	Dérivée f'
$]0, +\infty[$ ($\mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{N}$) ($\mathbb{R}^*$ si $a = -n, n \geq 2$)	$\frac{1}{a}x^{a+1}$	$x^a, a \neq -1$	ax^{a-1}
$\mathbb{R}^*$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\exp(x)$
$]0, +\infty[$	$x \ln(x) - x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\mathbb{R}^*$	$-\ln(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$

Equations différentielles linéaires

- Résolution : On résout l'équation homogène associée, et on cherche une solution particulière.
- Solutions de $y'(x) + ay(x) = 0$ (EDL1H) : $y(x) = C \exp(-ax)$.
- Tester une solution particulière "évidente" ($x^n, \exp(\lambda x), \cos(\lambda x), \dots$).
- Solution particulière de $y'(x) + ay(x) = b(x)$ (EDL1)
On la prend de la forme $y(x) = C(x) \exp(-a(x))$, avec $C(x)$ une primitive de $b(x) \exp(ax)$. [Variation de la constante]
- Solutions de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ (EDL2H à coeffs constants)
On résout $ax^2 + bx + c = 0$.
 - $y(x) = C \exp(r_1 x) + D \exp(r_2 x)$, si $b^2 - 4ac > 0$ (racines r_1, r_2).
 - $y(x) = \exp(rx)(Cx + D)$, si $b^2 - 4ac = 0$ (racine r).
- Solution particulière de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d$:
Tester $y(x) = C$ ou Cx ou Cx^2 , avec C un réel à déterminer.
- Solution particulière de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \exp(\lambda x)$:
Tester $y(x) = e \exp(\lambda x)$ ou $ex \exp(\lambda x)$ ou $ex^2 \exp(\lambda x)$.

Limites de suites

- $\frac{1}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$
- $n^a \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (si $a > 0$)
- $\exp(n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty, \exp(-n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.
- $\ln(n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty, \ln(\frac{1}{n}) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -\infty$.
- $(q^n)_n$ tend vers 0 si $q \in]-1, 1[$, vers 1 si $q = 1$, vers $+\infty$ si $q > 1$, n'a pas de limite si $q \leq -1$. $((-1)^n)_n$ n'a pas de limite.

Opérations sur les limites

- $\lim_n(\lambda u_n) = \lambda \lim_n(u_n), \lim_n(u_n + v_n) = \lim_n(u_n) + \lim_n(v_n),$
 $\lim_n(u_n v_n) = \lim_n(u_n) \lim_n(v_n)$, si les limites de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont finies.
[Multiple, somme, produit de limites]
- Si $u_n \leq v_n$ alors $\lim_n(u_n) \leq \lim_n(v_n)$ [Limite et comparaison]
- Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_n(u_n) = \lim_n(w_n) = l$, alors $v_n \rightarrow_n l$. [Gendarmes]

Formes indéterminées

- $\frac{0}{0}, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, (+\infty) + (-\infty), \frac{\infty}{0}$
Les cas $\infty \times \infty, 0 \times 0, 0 + 0, (+\infty) + (+\infty), \frac{0}{\infty}$ ne sont pas des formes indéterminées.

Croissances comparées

- Mémo : $\ln(n)^a \ll n^a \ll q^a \ll n!$ (si $a \neq 0$)
Le terme dominant détermine la limite (pour $n \rightarrow +\infty$)
- Mémo : $\ln(x)^a \ll x^a \ll \exp(ax)$ (ou q^x) (si $a \neq 0$)
Le terme dominant détermine la limite (pour $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty$)

Limites de fonctions

- $\frac{1}{x} \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} +\infty, \frac{1}{x} \rightarrow_{x \rightarrow 0^-} -\infty$
- Si f continue en a , $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a} f(a)$. [Continuité]
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \rightarrow f'(a)$, (si f dérivable en a). [Taux d'accroissement]
- Si $u_n \rightarrow_n l$ et f continue en l , alors $f(u_n) \rightarrow_n f(l)$. [Suites et continuité]
- Les opérations sur les limites, les comparaisons, et les formes indéterminées sont les mêmes que celles pour les suites.

Continuité

- Pour f continue sur $[a, b]$ et c entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $d \in [a, b]$ tel que $f(d) = c$. [TVI]
Si de plus f est strictement croissante/décroissante, alors d est unique.
- Pour f continue sur un intervalle (resp. segment), son image est un intervalle (resp. segment).
Toute fonction continue sur un segment possède un maximum et un minimum. [Théorème des bornes]
- Pour I un intervalle et f continue sur I , f est une bijection de I vers $f(I)$ ssi f est strictement croissante/décroissante. [Théorème de la bijection]
Dans ce cas, f^{-1} est continue de $f(I)$ vers I .

Dérivation

- Toute somme/produit/quotient/composée de fonctions de classe C^1 (resp. C^2, C^∞) sur un ensemble I est de classe C^1 (resp. C^2, C^∞) sur I (excepté les valeurs en lesquelles le quotient ou la composée ne sont pas bien définis).

- Pour f de classe C^1 sur un intervalle I , f est croissante (resp. décroissante) ssi $f' \geq 0$ (resp. $f' < 0$).
Si $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .
- Pour f dérivable sur un intervalle ouvert I , f possède un maximum/minimum local en un point x ssi f' s'annule en x en changeant de signe.
Tableau de variations.
- Tangente à f en $a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Pour f dérivable sur un intervalle I avec $|f'| \leq k$, pour tout $(a, b) \in I^2$ on a $|f(b) - f(a)| \leq k \cdot |b - a|$ [Inégalité des Accroissements Finis]
- Pour f de classe C^2 sur un intervalle I , f est convexe ssi $f'' \geq 0$ ssi f' est croissante. Elle est concave ssi $f'' \leq 0$ ssi f' décroissante. [Convexité]

Séries numériques

- Série : $\sum_{n \geq n_0} u_n$ (c'est une suite).
Somme partielle : $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ (c'est un nombre).
Somme : $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ (c'est un nombre, une limite de suite, si elle existe).
- $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est CV si $\sum_{k=n_0}^n u_k$ a une limite quand $n \rightarrow +\infty$.
- Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ CV alors $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une série à termes positifs (SATP), alors elle est CV ssi $\sum_{k=n_0}^n u_k$ est majorée.
- Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est absolument convergente (AC), alors elle est CV.
- $\sum_{k \geq 0} x^k$ est CV ssi $|x| < 1$. Alors, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. [Séries géométriques]
- $\sum_{k \geq 1} kx^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 2} k(k-1)x^{k-2}$ sont CV ssi $|x| < 1$.
Alors, $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ est CV, et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$. [Séries exponentielles]

Dénombrement

- On tire k éléments, n valeurs possibles. Nombre de tirages :

1. Sans remise, sans ordre : $\binom{n}{k}$ tirages. [Parties de E , loto]
2. Sans remise, avec ordre : $k! \binom{n}{k}$ tirages. [Arrangements, tiercé]
3. Avec remise, avec ordre : n^k tirages. [E^k , cadenas]
4. Avec remise, sans ordre : $\binom{n+k-1}{n-1}$ tirages. [Coupe de boules de glace]

Probabilités, variables aléatoires

- $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$, si $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \neq 0$.
- Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une famille d'ensembles 2 à 2 disjoints, $\mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$. [σ -additivité]
- $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A \cap B_i)$, si $(B_n)_{n \geq 1}$ partition de Ω . [Probabilités totales]
- $\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_j) \mathbb{P}(B_j)}$, si $(B_1, \dots, B_n)$ système complet de Ω . [Bayes]
- Variable aléatoire discrète : $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ avec $X(\Omega)$ fini ou indexé par $\mathbb{N}$.
 $(X = x) = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega) = x\}$, $(X \in A) = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega) \in A\}$.
- La loi de X est donnée par $X(\Omega)$ et par la liste $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.
- $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$ (existe si la série associée est CV).
 $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$. [Linéarité de l'espérance]
Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$. Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.
 $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$, $\mathbb{E}(1) = 1$.
- $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$. [Théorème de transfert]
- [Bernouilli] $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$. $\mathbb{E}(X) = p$, $Var(X) = p(1 - p)$.
- [Binomiale] $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
 $\mathbb{E}(X) = np$, $Var(X) = np(1 - p)$.
- [Uniforme] $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$. $\mathbb{E}[X] = \frac{n+1}{2}$, $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
- [Géométrique] $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- [Poisson] $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\exp(-\lambda) \lambda^k}{k!}$. $\mathbb{E}[X] = \lambda$, $Var(X) = \lambda$. ($\lambda \geq 0$)
- $Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0$. [Variance]
- $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$, si X, Y indépendantes.
- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$, si X, Y indépendantes.
- Arbres et tableaux pour représenter des expériences aléatoires.
- $F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$. [Fonction de répartition]

Séries statistiques

- Pour $(x_1, \dots, x_n)$ une série statistique, sa moyenne est $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$, sa variance est $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ et son écart-type est $s_x = \sqrt{s_x^2}$.

Graphes

- Matrice d'adjacence M : Pour un graphe à n sommets $\{s_1, \dots, s_n\}$, on pose $m_{i,j} = 1$ si une arête relie s_i à s_j et 0 sinon.
Le graphe est non orienté ssi M est symétrique.
- Le coefficient (i, j) de M^d correspond au nombre de chemins de s_i vers s_j de longueur d .
- Un graphe à n sommets est connexe ssi $I_n + M + \dots + M^{n-1}$ est à coefficients strictement positifs.