

PROGRAMME DE COLLE - COLLE N° 1

■ *Logique et raisonnement* ■

- Quantificateurs et symboles mathématiques.
- Savoir rédiger une réponse à un exercice (définir chaque objet, procéder à des calculs, justifier certaines implications/équivalences, faire des déductions, conclure).
- Rédiger le plus proprement possible : noms "simples" pour chaque objet, détailler ses calculs/arguments, écrire de façon lisible, gérer son brouillon en-dehors du résultat propre.
- Méthodes de raisonnement : raisonnement direct, contre-exemple, double-implication, récurrence.

■ *Suites réelles* ■

- Définition de suite, suite majorée, minorée, bornée, monotone, convergente et divergente. Savoir montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ vérifie l'une de ces propriétés.
- Savoir calculer le terme général d'une suite arithmétique ($u_{n+1} = u_n + b$), géométrique, arithmético-géométrique ($u_{n+1} = au_n + b$), et récurrente linéaire d'ordre 2.
- Limite d'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$. Limite finie, limite infinie. Limite d'une somme, d'un produit de suites convergentes.
On fera attention aux formes indéterminées $(+\infty, 0, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \dots)$.
- Théorème de convergence monotone : Une suite croissante converge ssi elle est majorée. Sinon elle diverge vers $+\infty$. Une suite décroissante converge ssi elle est minorée. Sinon elle diverge vers $-\infty$.
- Convergence et limite de la suite géométrique de terme général $u_n = q^n$.
- Théorème de comparaison. Théorème des gendarmes.
- Suites adjacentes, définition. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.
Savoir utiliser le Théorème des gendarmes pour déterminer la limite d'une suite $(u_n)_n$.

- Croissances comparées entre $\ln(n)^a$, n^b ($b > 0$), $e^n|c^n$, $n!$.
- Si les sous-suites $(u_{2n})_{n \geq n_0}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq n_0}$ convergent et ont la même limite, alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge.

■ *Séries numériques* ■

- Définition d'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Somme partielle S_n . Nature (convergente/divergente), somme $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$.
- Série absolument convergente.
- Connaître les propriétés des séries convergentes : Le terme général u_n tend vers 0, le reste tend vers 0, somme et multiples de séries CV.
- Savoir prouver correctement la convergence d'une série : Critère de convergence des séries à termes positifs. Une série absolument convergente est convergente.
- Connaître les exemples de référence (déf, nature, somme) : Série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$, Série géométrique dérivée $\sum_{n \geq 0} nq^{n-1}$, Série géométrique dérivée seconde $\sum_{n \geq 0} n(n-1)q^{n-2}$, série télescopique $\sum_{n \geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$, série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.
- Savoir utiliser les exemples de référence pour montrer qu'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente ou divergente (comparaison).
Savoir déterminer la somme d'une série à partir des séries de référence.

■ *Suites et séries 2* ■

- $(u_n)_{n \geq 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \geq 0}$ si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. On le note $u_n = o(v_n)$.
 $(u_n)_{n \geq 0}$ est équivalente à $(v_n)_{n \geq 0}$ si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$. On le note $u_n \sim v_n$.
- La relation $u_n = o(v_n)$ n'est pas symétrique. Pour $u_n = o(n^2)$ on a $u_n = o(n^4)$, mais si $v_n = o(n^4)$ rien n'assure que $v_n = o(n^2)$.
- Règles de calculs des o : $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$, $o(v_n)o(w_n) = o(v_n w_n)$, $o(v_n) = v_n o(1)$, $o(\lambda v_n) = o(v_n)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$), $o(o(v_n)) = o(v_n)$.
- Rem : Les notations $u_n = o(0)$ et $u_n \sim 0$ n'ont pas de sens.
- On a $u_n = o(1)$ ssi $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et CV, de limite λ , ssi $u_n = \lambda + o(1)$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \lambda$ ssi $u_n \sim \lambda$. (Faux pour $\lambda = 0$)

— Equivalents usuels : Si $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $\exp(u_n) - 1 \sim u_n$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

— Connaître les croissances comparées pour les suites.

Question de cours :

1. Théorème de convergence monotone. Théorème de comparaison (cas convergent et cas divergent).

Théorème des gendarmes. Suites adjacentes (définition et propriété).

2. Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. (Exemples à traiter, 2 parmi les 4, déterminer l'expression explicite et la convergence éventuelle) Exemples : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 6$; $w_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = -2w_n$; $v_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

3. Définition d'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Somme partielle S_n . Nature (conver-

gente/divergente), définition de la somme $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$.

Théorème sur la convergence de séries à termes positifs.

4. Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}, (w_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$ des suites réelles, avec $(v_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$ qui sont non-nulles à partir d'un certain rang. Définition de $u_n = o(v_n)$. Propriétés opératoires de o pour les suites :

— Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$, alors $u_n + w_n = o(v_n)$. (Addition de o)

— Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$. (Multiplication de o)

— En particulier, si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = v_n \cdot o(1)$.

— Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(t_n)$ alors $u_n = o(t_n)$.

Preuve de la somme de o .

5. Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}, (w_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$ des suites réelles, avec $(v_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$ qui sont non-nulles à partir d'un certain rang. Définition de $u_n \sim v_n$.

Equivalents usuels : Si $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $\exp(u_n) - 1 \sim u_n$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.