

Chapitre 1

Suites et séries 2

Table des matières

1	Généralités sur les suites réelles	1
1.1	Rappels sur les suites	1
1.2	Suites usuelles	5
1.3	Limite d'une suite réelle	7
1.4	Théorèmes d'existence de limite	9
1.5	Croissances comparées	11
2	Suites négligeables, suites équivalentes	12
2.1	Croissances comparées (bis)	14
2.2	Équivalents classiques	14
3	Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	14
3.1	Généralités	14
3.2	Cas des fonctions continues croissantes	15
3.3	Cas des fonctions dérivables : Inégalité des accroissements finis	17
4	Suites définies implicitement via une relation de la forme $f_n(u_n) = 0$	17
4.1	Suites définies via une relation de la forme $f(u_n) = n$	18
5	Généralités sur les séries numériques	18
5.1	Séries convergentes, sommes	18
5.2	Séries à termes positifs	20
5.3	Séries absolument convergentes	21
5.4	Propriétés des séries et de leur somme	21
5.5	Théorème de comparaison	22
5.6	Séries à termes généraux équivalents	22
5.7	Séries et négligeabilité	23
5.8	Comparaison série-intégrale	23
5.9	Séries et croissances comparées	24
6	Séries usuelles	25
6.1	Séries télescopiques	25
6.2	Séries géométriques	26
6.3	Séries géométriques dérivées	26
6.4	Série harmonique, séries de Riemann	27
6.5	Séries exponentielles	27
6.6	Séries alternées, séries logarithmes	28
7	Bilan des méthodes	28

Un certain nombre de concepts utiles pour ce chapitre ont été vus précédemment. Il s'agit :

1. Des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.
2. De la droite réelle $\mathbb{R}$, la relation d'ordre $\leq$, ainsi que les notions de majorant, minorant, maximum et minimum d'une fonction à valeurs réelles.
3. Des parties de $\mathbb{R}$, en particulier les intervalles.
4. De la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$.

1 Généralités sur les suites réelles

1.1 Rappels sur les suites

DÉFINITION 1 (Suite réelle)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Une **suite réelle** $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une fonction de $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ dans $\mathbb{R}$.

Une telle suite n'est pas indexée sur $\mathbb{N}$, mais sur l'ensemble des entiers supérieurs à n_0 .

Le nombre u_n est appelé le **terme général** de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Le nombre entier n est appelé **l'indice** du terme u_n .

REMARQUE 2 — La notation $(u_n)_{n \geq n_0}$ permet d'identifier clairement l'indice initial de la suite (ici, l'indice n_0). Souvent, on a $n_0 = 0, 1$ ou 2 .

Abus de notation : On abrège parfois $(u_n)_{n \geq n_0}$ en $(u_n)_n$.

EXEMPLE 3 — L'expression $(n^2)_{n \geq 0}$ est une suite, dont le terme général est $u_n = n^2$.

Elle correspond à la fonction $n \in \mathbb{N} \mapsto n^2 \in \mathbb{R}$.

REMARQUE 4 — Attention ! Pour I un ensemble d'entiers naturels, si on souhaite définir une suite $(u_n)_{n \in I}$, il faut s'assurer que son terme général u_n existe bien, c'est-à-dire que pour tout $n \in I$, u_n ait un sens.

En général il faut faire attention aux premières valeurs.

EXEMPLE 5 — La suite de terme général $\frac{1}{n}$ ne peut pas se définir pour tout $n \in \mathbb{N}$ mais seulement à partir du rang $n_0 = 1$. On notera donc cette suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$. Son indice initial est 1, et son premier terme est 1.

La suite $(\frac{1}{n-n^2})_{n \geq 2}$ a pour indice initial 2. Son premier terme est $\frac{1}{2-4} = \frac{-1}{2}$.

EXERCICE 1 — Déterminer le plus petit entier n_0 pour lequel on peut définir la suite $(\frac{2n}{1-\frac{n^2}{7,5}})_{n \geq n_0}$.
Puis, calculer les 3 premiers termes de cette suite.

Mentionnons les propriétés des suites ainsi que les suites usuelles vues en première années.

Variations d'une suite

Tout comme les fonctions d'une variable réelle, les suites réelles possèdent une notion de variation (suites croissantes, décroissantes, strictement croissantes, strictement décroissantes, constantes).

EXEMPLE 6 —

— La suite $(\frac{1+n}{1+n^2})_{n \geq 0}$ est décroissante.

En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1 + (n+1)}{1 + (n+1)^2} - \frac{1+n}{1+n^2} \\ &\stackrel{\text{réduction au même dénominateur}}{=} \frac{(2+n)(1+n^2) - (1+n)(1+(n+1)^2)}{(1+(n+1)^2)(1+n^2)} \\ &= \frac{-3n - n^2}{(1+(n+1)^2)(1+n^2)} \leq 0 \end{aligned}$$

— La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout entier n par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + 2$ est strictement croissante.

En effet, pour tout entier n , on a $v_{n+1} - v_n = 2 > 0$.

— La suite $(e)_{n \geq 0}$ est constante.

Il existe plusieurs méthodes pour montrer qu'une suite est monotone. On étudie en général le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

On peut aussi étudier le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, à condition de vérifier que la suite ne s'annule pas et de faire attention au signe de u_n .

EXEMPLE 7 — Montrons que la suite $(u_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{(n+1)!}{2^n}\right)_{n \geq 1}$ est strictement croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On remarque que tous les termes de la suite sont strictement positifs. Et, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{2^n}} = \frac{2^n \times (n+2)!}{(n+1)! \times 2^{n+1}} = \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1 \stackrel{>}{\underset{n \geq 1}{}} 1$$

Ainsi, on a $u_{n+1} > u_n$, donc cette suite est strictement croissante.

Les suites sont le domaine parfait pour faire des preuves par récurrence. Elles sont parfois nécessaires (mais pas toujours).

EXEMPLE 8 — Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ par $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$.

1. Calculons les premiers termes de la suite : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$.

2. On obtient $u_0 \leq u_1 < u_2 < u_3$.

Ainsi, on conjecture que $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

3. Pour $n \geq 0$, posons $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \leq u_{n+1}$ ". Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

— Initialisation : Les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies puisque $u_0 \leq u_1$ et $u_1 < u_2$.

— Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, tel que $\mathcal{P}(m)$ est. Montrons que $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_{m+1} > u_m$. Par construction de la suite, on a $u_{m+2} = 2u_{m+1} - u_m$ (changement d'indice).

On a donc $u_{m+2} - u_{m+1} = u_{m+1} - u_m \geq 0$. Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

Cela termine la récurrence.

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Encadrement d'une suite

Comme une suite réelle est une fonction (de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$), elle peut être majorée, minorée ou bornée.

EXEMPLE 9 —

- La suite $(n^2)_{n \geq 0}$ est minorée mais pas majorée.
 La suite $(n^2)_{n \geq 0}$ est minorée par 0, son premier terme, car elle est croissante.
 Montrons que $(n^2)_{n \geq 0}$ n'est pas majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$. On cherche $n \geq 0$ tel que $u_n > M$.
 Si $M \leq 0$, alors $n = 1$ convient car $u_1 = 1$.
 Supposons maintenant que $M > 0$. On a alors $u_n > M$ ssi $n^2 > M$ ssi $n > \sqrt{M}$. Le nombre $m = \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1$ est un entier, et il vérifie $m > \sqrt{M}$. Ainsi, on a $u_m > M$.
 Cela démontre que la suite $(n^2)_{n \geq 0}$ n'est pas majorée.
- La suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est bornée.
 Pour $n \geq 1$ on a $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)}$, donc cette suite est strictement décroissante. Elle est donc majorée par son premier terme, qui vaut $u_1 = 1$. Et cette suite est positive, ce qui veut dire qu'elle est minorée par 0. Elle est donc bien bornée.

Propriétés à partir d'un certain rang

DÉFINITION 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$ une proposition (vraie ou fausse).

On dit que $P(n)$ est vraie **à partir d'un certain rang** s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \llbracket k, +\infty \rrbracket$ on a $P(n)$ vraie.

Dans le cas des suites, on peut ainsi parler de suites croissantes à partir d'un certain rang, décroissantes à partir d'un certain rang, majorées à partir d'un certain rang, ou d'une inégalité $u_n \leq v_n$ vraie à partir d'un certain rang.

Souvent, on ne connaît pas la valeur du rang k à partir duquel la propriété est vraie, on sait simplement que ce rang existe. Cela revient à dire que lorsque "n est suffisamment grand", la propriété $P(n)$ est vraie, et que l'on ne sait pas ce qui se passe lorsque "n est petit".

Attention, une suite croissante à partir d'un certain rang n'est en général pas croissante (on ne sait rien sur la valeur des premiers termes). Par exemple, $(\frac{n!}{3^n})_{n \geq 0}$ n'est pas croissante, mais est croissante à partir du rang 3.

Définition explicite, implicite, par récurrence

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ peut être définie de plusieurs façons différentes. Selon la définition de la suite, certaines propriétés seront plus ou moins faciles à vérifier. On cherche parfois aussi à changer d'expression (passer d'une expression implicite à une expression explicite ou à une expression par récurrence).

DÉFINITION 11 (Suite explicite)

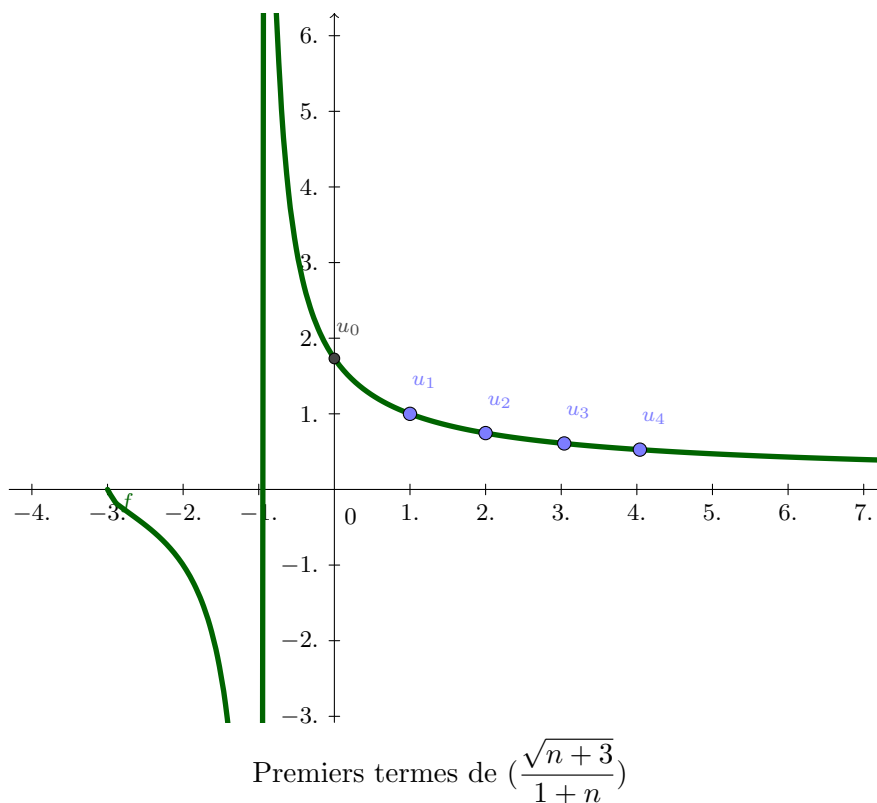
On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est explicite s'il existe une fonction $f : [n_0, +\infty[$ telle que pour tout entier $n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$, on ait $u_n = f(n)$.

On dit que f est la **fonction associée** à la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Les suites dites explicites sont des suites dont les termes peuvent se calculer indépendamment, ce qui rend leur calcul pratique.

EXEMPLE 12 — La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de terme général $u_n = \frac{\sqrt{n+3}}{1+n}$ est une suite explicite, définie par la fonction $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{\sqrt{x+3}}{1+x}$.

En utilisant un graphique, on peut représenter une suite explicite via le graphe de sa fonction associée.



EXEMPLE 13 — On pose $(u_n)_{n \geq 0} = \left(\frac{2+n}{1+n}\right)_{n \geq 0}$.

Cette suite est explicite, de fonction associée $f : x \in [0, \infty[\mapsto \frac{2+x}{1+x}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $f' : x \mapsto \frac{-1}{(1+x)^2}$. Comme $f' < 0$, on en déduit que f est strictement décroissante et donc que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite strictement décroissante.

DÉFINITION 14 (Suite récurrente)

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

On dit que est $(u_n)_{n \geq n_0}$ **récurrente** ou **définie par récurrence** si, pour tout entier $n \in \llbracket n_0 + 1, +\infty \llbracket$, le terme général u_n se définit en fonction des termes $u_{n_0}, \dots, u_{n-1}$.

EXEMPLE 15 —

1. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (u_{n-1})^2 + 4$, est une suite récurrente.
2. La suite $(n^2)_{n \geq n_0}$ est définie de façon explicite. Cependant, pour $n \geq 1$ si l'on cherche une relation entre u_n et u_{n-1} , on obtient : $u_n = (n-1+1)^2 = (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 = u_{n-1} + 2\sqrt{u_{n-1}} + 1$.
On peut donc aussi écrire cette suite avec une relation de récurrence.
3. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$, est une suite récurrente. (C'est en fait une suite géométrique)
4. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ par $u_n = (n-1)^2 \cdot u_{n-1} + u_{n-2}^2$, est une suite récurrente.

REMARQUE 16 — Pour une suite récurrente $(u_n)_{n \geq n_0}$, au lieu d'exprimer, pour tout $n \in \llbracket n_0 + 1, +\infty \llbracket$, u_n en fonction des termes $u_{n_0}, \dots, u_{n-1}$, on peut aussi à la place exprimer u_{m+1} en fonction de $u_{n_0}, \dots, u_m$ pour tout $m \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$. (Cela correspond au changement de variables $m = n - 1$). Par exemple, la relation " $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2u_{n-1} + 3$ " est équivalente à " $\forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = 2u_m + 3$ ". De même, la relation " $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, u_n = (n-1)^2 \cdot u_{n-1} + u_{n-2}^2$ " est équivalente à " $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+2} = (k+1)^2 \cdot u_{k+1} + u_k^2$ ". (poser $k = n - 2$)

DÉFINITION 17 (Suite implicite)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est implicite si pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$, il existe une équation (E_n) dont u_n est l'unique solution.

EXEMPLE 18 — La fonction $g : x \in [0, +\infty[\mapsto x^3 + 2x^2 - 1$ est strictement croissante, continue, et avec $g(0) = -1$ et $g(x) \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, d'après le TVI, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique nombre u_n tel que $g(u_n) = n$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est alors une suite implicite.

Chaque terme u_n existe bien, mais l'on ne possède pas de façon explicite de calculer u_n (il faut d'abord résoudre l'équation $g(x) = n$ pour cela).

Cependant, les variations de g impliquent que $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante. Et comme on a $g(\frac{n^{1/3}}{2}) = \frac{n}{8} + \frac{n^{2/3}}{2} - 1 \leq n$, on en déduit aussi que $u_n \geq \frac{n^{1/3}}{2}$.

EXEMPLE 19 — La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est l'unique solution sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$ de l'équation $x \ln(x) = n^2 + 1$.

En étudiant la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ on vérifie que pour tout $n \geq 0$ fixé, l'équation $x \ln(x) = n^2 + 1$ possède bien une solution. Mais on ne possède pas d'outils pour donner une expression explicite de u_n .

Cependant, les variations de h impliquent que $(v_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante. Et comme on a $h(n) = n \ln(n) \leq n^2 + 1$, on en déduit aussi que $v_n \geq n$.

1.2 Suites usuelles**Suites arithmétiques et géométriques****DÉFINITION 20 (Suite arithmétique)**

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la **raison** de la suite arithmétique.

EXEMPLE 21 — La suite $(v_n)_{n \geq 2}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, par $v_2 = 3$ et $v_{n+1} = v_n + 5$ est arithmétique. Sa raison est $r = 5$.

Une suite arithmétique est définie par récurrence.

DÉFINITION 22 (Suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_n$ est une suite **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$, on a $u_{n+1} = q \times u_n$.

Le réel q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

EXEMPLE 23 — Pour $u_n = 3 \times 5^{n-2}$, La suite $(w_n)_{n \geq 2}$ telle que $w_0 = 3$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a $w_{n+1} = 5w_n$, est une suite géométrique de raison 5.

Suites arithmético-géométriques

Un peu plus élaboré que les suites arithmétiques ou géométriques, les suites arithmético-géométriques.

DÉFINITION 24

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **arithmético-géométrique** s'il existe a, b des réels tels que pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$, on a $u_{n+1} = a \times u_n + b$.

EXEMPLE 25 — La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de terme général, pour tout $n \geq 0$, $u_n = 3 \times 2^n + 1$, est arithmético-géométrique.

En effet, pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3 \times 2^{n+1} + 1 \\ &= 2 \times (3 \times 2^n) + 1 \\ &= 2 \times (3 \times 2^n + 1) + 1 - 2 \\ &= 2 \times u_n - 1. \end{aligned}$$

Cette suite vérifie donc bien une relation de récurrence de suite arithmético-géométrique, (avec $a = 2$ et $b = -1$).

Suites définies par une somme

Les termes d'une suite sont des nombres réels. On peut donc les sommer. Cela donne un lien entre suites arithmétiques/géométriques et sommes arithmétiques/géométriques

PROPOSITION 26

Soient $(u_k)_{k \geq 0}$ une suite réelle et $n \in \mathbb{N}$.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_k = k$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{n(n+1)}{2}$. (Somme arithmétique)
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_k = k^2$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_k = a^k$, avec $a \neq 1$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$. (Somme géométrique)

Les techniques de sommation comme le télescopage peuvent être utilisées pour déterminer explicitement certaines suites définies par récurrence.

EXEMPLE 27 — Calculons le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, et pour tout

$n \geq 0$ par $2u_{n+1} = 2u_n + \frac{6\pi n}{4} + e^n$, à l'aide de la somme télescopique $\sum_{k=1}^n u_k - u_{k-1}$.

- Commençons par remarquer que $\sum_{k=1}^n u_k - u_{k-1} = u_n - u_{1-1} = u_n - u_0$ par télescopage. Donc, $u_n = u_0 + \sum_{k=1}^n u_k - u_{k-1}$. Calculons la somme en question.
- Remarquons que l'on a :

$$2u_{n+1} = 2u_n - \frac{6\pi n}{4} + e^n \iff u_{n+1} - u_n = \frac{3\pi n}{4} + \frac{e^n}{2}$$

En changeant d'indice ($k = n+1$, donc $n = k-1$), on obtient alors $u_k - u_{k-1} = \frac{3\pi(k-1)}{4} + \frac{e^{k-1}}{2}$.

- On calcule :

$$\sum_{k=1}^n u_k - u_{k-1} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{3\pi(k-1)}{4} + \frac{e^{k-1}}{2} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{3\pi k}{4} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{3\pi}{4} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{e^k}{2e} = \frac{3\pi}{4} \times \left(\sum_{k=1}^n k \right) - \frac{3\pi}{4} \times \sum_{k=1}^n (1) +$$

- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{3\pi}{4} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{3\pi}{4}n + \frac{1}{2e} \times \left(\frac{e^{n+1} - 1}{e - 1} - 1 \right)$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques appartiennent à ce qu'on appelle les suites récurrentes affines d'ordre 1. Ce sont les suites définies par récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$, pour $a, b \in \mathbb{R}$. Allons un peu plus loin.

DÉFINITION 28 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle.

On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe a, b des réels tels que pour tout $n \geq 0$, on ait $u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n$.

REMARQUE 29 — Lorsque l'on veut définir une unique suite récurrente linéaire d'ordre 2, il est nécessaire de fixer les deux premiers termes u_0 et u_1 .

L'exemple principal de suite récurrente linéaire d'ordre 2 est la suite dite de Fibonacci.

EXEMPLE 30 — (**Suite de Fibonacci**) La suite de Fibonacci est définie pour tout entier $n \geq 0$ par : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et par $u_0 = 1, u_1 = 1$.

Le calcul manuel donne : $u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 8, \dots$

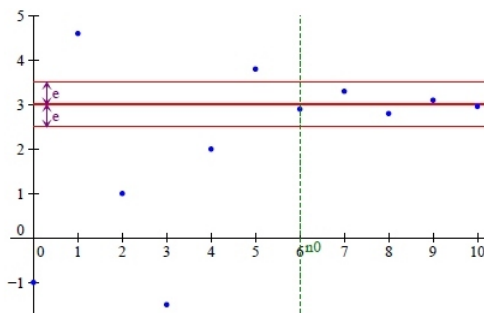
1.3 Limite d'une suite réelle**DÉFINITION 31 (Limite d'une suite)**

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle, et soit $l \in \mathbb{R}$ un réel.

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ **converge vers l** , ce que l'on note $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} l$, si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_1 \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \in \llbracket n_1, +\infty \llbracket \text{ on a } |l - u_n| < \epsilon.$$

Moins formellement, on a $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} l$ si tout intervalle I contenant l , aussi petit que l'on veut, contient aussi tous les termes de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à partir d'un certain rang n_0 . En effet, l'inégalité $|l - u_n| < \epsilon$ se réécrit $l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$. Le nombre $l \in \mathbb{R}$ est appelé **une limite** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.



Une suite convergente vers 3.

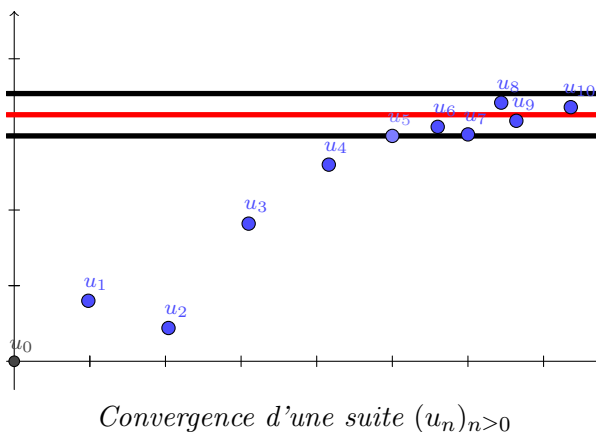
DÉFINITION 32 (Suite divergente)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.

EXEMPLE 33 — La suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0 en $+\infty$.

EXERCICE 2 — Montrer que $(1 + \frac{1}{n^2})_{n \geq 1}$ converge vers 1.

**PROPOSITION 34 (Unicité de la limite)**

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle. Soient l_1, l_2 deux réels tels que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l_1$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l_2$.

Alors on a $l_1 = l_2$.

Une suite qui est convergente possède une unique limite.

DÉFINITION 35

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle qui est convergente.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ **la limite** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

EXEMPLE 36 — Il existe des suites qui ne sont pas convergentes.

1. La suite $((-1)^n)_{n \geq 0}$ n'est pas convergente. Elle alterne entre les valeurs -1 et 1 .
2. La suite $(n^2)_{n \geq 0}$ n'est pas convergente.

DÉFINITION 37 (Limite infinie)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ **tend vers** $+\infty$, noté $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$, si :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_1 \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \in \llbracket n_1, +\infty \llbracket \text{ on a } u_n > M.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ **tend vers** $-\infty$, noté $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -\infty$, si :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists n_1 \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \in \llbracket n_1, +\infty \llbracket \text{ on a } u_n < m.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Moins formellement, on a $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$ si tout intervalle de la forme $]M, +\infty[$, avec M aussi grand que l'on veut, contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ à partir d'un certain rang n_0 .

On parle aussi de suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ qui **diverge** vers $+\infty/-\infty$ (en opposition aux suites qui convergent vers un nombre réel l).

EXEMPLE 38 — La suite $(\sqrt{n})_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$.

En effet, soit $M \in \mathbb{R}$. On recherche un entier n_0 , tel que pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ on a $\sqrt{n} > M$.

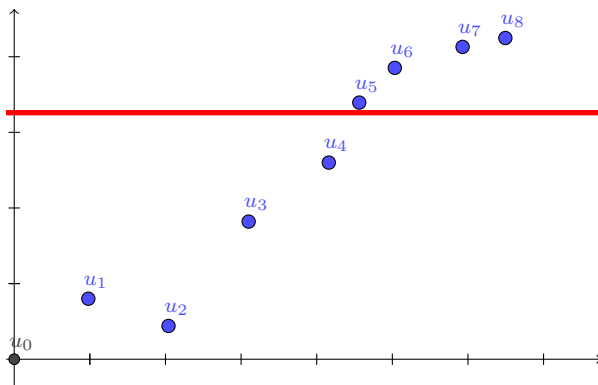
On distingue deux cas :

1. Si $M < 0$ l'inégalité $\sqrt{n} > M$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc choisir $n_0 = 0$.
2. Si $M \geq 0$, pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\sqrt{n} > M$ ssi $n > M^2$. En posant $n_0 = \lfloor M^2 \rfloor + 1$, n_0 est un entier et on a $n_0 > M^2$. Alors, pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ on a $n \geq n_0 > M^2$, donc $\sqrt{n} > M$.

Dans tous les cas, on a montré que l'entier n_0 qui convient existe. Ainsi, on en conclut que $(\sqrt{n})_{n \geq n_0}$ tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3 — Montrer que la suite $(1 + n - n^2)_{n \geq 0}$ tend vers $-\infty$.

EXERCICE 4 — Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de Fibonacci ($u_0 = 1, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$). Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq n$. (Quelle méthode de démonstration utiliser ?) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$.



Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui diverge vers $+\infty$.

Quand on connaît la limites de certaines suites, on peut calculer la limite (si elle existe) de nouvelles suites plus compliquées, à l'aide des opérations usuelles (somme, produit, quotient de suites), à l'aide de composées d'une suite par une fonction continue ou à l'aide de changements d'indice dans la suite $((u_{n+1})_n, (u_{2n})_n, \dots)$.

EXEMPLE 39 — On considère les suites $(2 + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ et $(3 + (\frac{1}{2})^n)_{n \geq 1}$. Alors :

$$\begin{array}{l|l} 1. \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{n} + 3 + (\frac{1}{2})^n) = 2 + 3 = 5 & 3. \lim_{n \rightarrow +\infty} ((2 + \frac{1}{n}) \times (3 + (\frac{1}{2})^n)) = 2 \times 3 = 6 \\ 2. \lim_{n \rightarrow +\infty} ((2 + \frac{1}{n}) - (3 + (\frac{1}{2})^n)) = 2 - 3 = -1 & 4. \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + (\frac{1}{2})^n}) = \frac{2}{3} \end{array}$$

EXERCICE 5 — Déterminer si les suites suivantes sont convergentes. Si oui, déterminer leur limite :

$$\begin{array}{l|l} 1. \left(\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right)_{n \geq 1} & 3. \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \right)_{n \geq 1} \\ 2. \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \right)_{n \geq 1} & 4. \left(\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} \right)_{n \geq 1} \end{array}$$

1.4 Théorèmes d'existence de limite

Lorsqu'on étudie une suite il faut donc d'abord déterminer si elle admet une limite avant d'en parler.

Certains théorèmes affirment sous certaines conditions l'existence d'une limite, sans pour autant connaître sa valeur.

Théorème de la limite monotone

THÉORÈME 40

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle. Alors :

- Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante et majorée, alors elle est convergente.
- Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et minorée, alors elle est convergente.
- Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante et non-majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

— Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et non-minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

EXEMPLE 41 —

1. $(1 - \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est croissante et majorée, donc converge.
2. $(e^{-n} \times n)_{n \geq 1}$ est décroissante minorée par 0, donc converge.
3. $(2 \times n!)_{n \geq 0}$ est croissante non-majorée, donc diverge par $+\infty$.
4. $(-n^3)_{n \geq 0}$ est décroissante non-minorée, donc diverge vers $-\infty$.

Suites adjacentes

DÉFINITION 42 (Suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles.

On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont **adjacentes** si :

- La suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est croissante.
- La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante.
- La suite $(u_n - v_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0. ($\lim_n (u_n - v_n) = 0$)

THÉORÈME 43

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites adjacentes.

Alors, les suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont convergentes, et elles ont la même limite. ($\lim_n (u_n) = \lim_n (v_n)$)

EXEMPLE 44 — Les suites $(u_n)_{n \geq 1} = (1 - \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1} = (1 + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ sont adjacentes. En effet, on a :

- $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
- $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n} - (1 + \frac{1}{n}) = -\frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Théorèmes d'encadrements

THÉORÈME 45 (Théorème des gendarmes)

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}, (w_n)_{n \geq n_0}$ trois suites réelles, telles que :

- $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(w_n)_{n \geq n_0}$ convergent, et ont la même limite l .
- Il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \in \llbracket n_1, +\infty \llbracket$, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
(La suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est encadrée, à partir d'un certain rang, par $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(w_n)_{n \geq n_0}$.)

Alors $(v_n)_{n \geq n_0}$ est une suite convergente, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

THÉORÈME 46 (Comparaison et divergence)

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles.

Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$, on ait $u_n \leq v_n$. On a :

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

THÉORÈME 47 (Limite de suite géométrique)

Soient $q \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ la suite géométrique de terme général $u_n = q^n$. On a :

1. Si $q > 1$, alors $\lim_n (u_n) = +\infty$.
2. Si $q = 1$, alors $\lim_n (u_n) = 1$.
3. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_n (u_n) = 0$.
4. Si $q \leq -1$ alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'a pas de limite.

1.5 Croissances comparées

Chez les suites, on trouve plusieurs familles de suites qui tendent vers $+\infty$ (logarithme, puissance, polynôme, exponentielle, factorielle). On donne dans cette section des comparaisons de "vitesses de croissance/décroissance" entre ces différentes familles. Ce sont les **croissances comparées**.

THÉORÈME 48 (**Croissances comparées**)

$$1. \forall q \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0.$$

La factorielle croît "bien plus vite" que les suites géométriques.

$$2. \forall q \in]1, +\infty[\text{ et } \forall a > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty.$$

$$3. \forall q \in]-1; 1[\text{ et } \forall a > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^a} = 0.$$

Les suites géométriques croissent/décroissent "bien plus vite" que les suites "puissance"/"polynômes".

$$4. \forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0.$$

Les suites "puissance"/"polynômes" croissent "bien plus vite" que les suites "logarithmiques".

EXERCICE 6 — Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} + n^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1$.

2 Suites négligeables, suites équivalentes

Nous abordons de nouveaux objets en analyse : les comparaisons.

Ces outils permettent d'étudier une suite (lorsque $n \rightarrow +\infty$), avec plus de précision que ce que vous connaissez déjà.

Par exemple, cela permet de lever les formes indéterminées.

DÉFINITION 49 (Suite négligeable)

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}$ des suites réelles, avec $(v_n)_{n \geq n_0}$ qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

On dit que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **négligeable** par rapport à $(v_n)_{n \geq n_0}$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

On le note $u_n = o(v_n)$. On le prononce "u_n est un petit o de v_n."

REMARQUE 50 —

- Dire que $u_n = o(1)$ revient à dire que $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.
- **Attention !** Beaucoup de suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ sont des $o(v_n)$. Cette notation ne désigne pas une unique suite. Dans des calculs, si vous voyez plusieurs $o(v_n)$ apparaître, ils désignent des suites qui sont a priori différentes. Par exemple, $n = o(n^2)$ et $n + 2 = o(n^2)$.
- **Attention !** Chaque $o(v_n)$ désigne le terme général d'une certaine suite $(u_n)_{n \geq n_0}$. A n fixé, c'est le terme d'une suite (donc un nombre réel dont on ne connaît pas la valeur précise).
- **Attention !** Il faut que la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ soit non-nulle à partir d'un certain rang. Cela est absolument nécessaire (on ne divise pas par 0). La notion de $o(0)$ n'a pas de sens.
- On cherche souvent à utiliser une suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ dont l'expression est très simple ($n, n^2, n^k, \frac{1}{n}, \ln(n), \dots$). Par exemple, si on a $u_n = o(2n^2 + 1)$, alors on a en fait $u_n = o(n^2)$ (cela est équivalent, et plus clair). Ce qui est important est l'ordre de grandeur de la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ (le terme dominant).
- Les égalités faisant intervenir les o sont de vraies égalités, et on peut faire du calcul algébrique avec.
Addition : Pour $u_n = n + n^{\frac{1}{3}}$, on a $u_n - n = o(\sqrt{n})$. On peut aussi écrire $u_n = n + o(\sqrt{n})$.
On a de même $u_n - n = o(n)$, d'où $u_n = n + o(n)$.
Multiplication : Pour $u_n = \sqrt{n}$ on a $u_n = o(n)$. On peut aussi écrire $u_n = n.o(1)$. (la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est égale à la suite $(n)_n$ multipliée par une suite qui tend vers 0)

PROPOSITION 51 (Règles de calcul sur la négligeabilité)

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}, (w_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$ des suites réelles, avec $(v_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$ qui sont non-nulles à partir d'un certain rang. On a :

- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$, alors $u_n + w_n = o(v_n)$. (Addition de o)
- Si $u_n = o(v_n)$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lambda u_n = o(v_n)$. (Multiplication par une constante)
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$. (Multiplication de o)
- En particulier, si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = v_n.o(1)$. ("Factorisation" de o)
- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(t_n)$ alors $u_n = o(t_n)$. (Composition de o)

Démonstration — On écrit la définition de négligeabilité, et on vérifie chaque cas. □

REMARQUE 52 — La première propriété donne des calculs comme : $o(n) + o(n) = o(n)$. Et la deuxième donne du : $\lambda.o(n) = o(n)$.

Cela peut sembler perturbant, mais il faut bien prendre conscience que $o(n)$ désigne une suite dont on ne connaît pas les valeurs (sa seule propriété est d'être négligeable devant n). Chaque $o(n)$ dans l'expression désigne une suite différente.

Une fois ces règles comprises, le symbole du o permet de faire des calculs d'approximations de façon très souple et efficace.

DÉFINITION 53 (Suites équivalentes)

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles, qui sont non-nulles à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont **équivalentes** si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

On le note $u_n \sim v_n$.

Cela se lit " u_n est équivalent à v_n , quand n tend vers $+\infty$ ".

PROPOSITION 54

Deux suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont équivalentes si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$, si et seulement si $u_n - v_n = o(u_n)$.

REMARQUE 55 —

- **Attention !** La relation d'équivalence n'est vraie que pour les suites non-nulles à partir d'un certain rang. Dire que $u_n \sim 0$ n'a pas de sens.
Alors ne l'écrivez jamais. (Si vous voulez dire que $(u_n)_{n \geq n_0}$ a une limite nulle, écrivez $u_n = o(1)$).
- Si k est un réel non nul, dire que $u_n \sim k$ est équivalent à dire que $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers k . Cela revient aussi à dire que $u_n - k = o(k) = o(1)$.
- Si deux suites sont équivalentes, et qu'elles convergent ou divergent en l'infini, alors leurs limites sont égales.
- La notion d'équivalence permet d'étudier le comportement limite d'une suite (convergence, divergence, vitesse de croissance) en simplifiant son expression.
Par exemple, $2n^3 - 10n + \pi^2 \sim 2n^3$. (On ne garde que le terme dominant)

PROPOSITION 56 (Règles de calcul d'équivalences)

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}, (w_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$ des suites réelles qui sont non-nulles à partir d'un certain rang. On a :

- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
- Si $u_n \sim v_n$, et si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont positives, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Démonstration — Admis.

REMARQUE 57 — Attention ! On ne peut pas additionner des équivalents en général.

C'est une source d'erreur fréquente, qui aboutit souvent à $u_n \sim 0$.

Par exemple $n^2 + n \sim n^2$, et $-n^2 - 3 \sim -n^2$, mais la somme vaut d'un côté $n - 3$ et de l'autre 0.

Attention ! On ne peut pas composer en général un équivalent par une fonction f .

Par exemple, on a bien $n^2 + n \sim n^2$, mais $e^{n^2+n} \not\sim e^{n^2}$ (le quotient de ces deux suites est égal à e^n , qui tend vers $+\infty$).

Pour utiliser des sommes et des composées, il faudra manipuler des o .

Exemples : Grâce aux propriétés de l'équivalence sur le produit et le quotient, on peut déjà obtenir quelques calculs rapides de limites.

Par exemple, on a $\frac{n^2 + \sqrt{n} + 1}{e^n - n^4} \sim \frac{n^2}{e^n}$.

On sait ainsi que ce quotient converge vers 0 grâce aux croissances comparées.

PROPOSITION 58 (Liens avec la convergence)

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}$ des suites réelles, avec $(v_n)_{n \geq n_0}$ qui est non-nulle à partir d'un certain rang. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

- $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ ssi $u_n = o(1)$
- $u_n \sim v_n$ ssi $u_n = v_n + o(v_n)$
- $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \lambda$ ssi $u_n = \lambda + o(1)$
- Si $\lambda \neq 0$, $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \lambda$ ssi $u_n \sim \lambda$

2.1 Croissances comparées (bis)

PROPOSITION 59

Soient $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$.

- $\forall b > 0, \forall a > 0$, on a $(\ln n)^a = o(n^b)$.
Le logarithme (et ses puissances) est négligeable devant le polynomial.
- Si $\alpha < \beta$, on a $n^\alpha = o(n^\beta)$.
Le polynomial est négligeable devant du polynomial d'exposant plus grand.
- $\forall a > 1, \forall b > 0$, on a $n^b = o(a^n)$.
Le polynomial est négligeable devant de la fonction puissance (croissance exponentielle).

2.2 Équivalents classiques

COROLLAIRE 60

Une suite polynômiale de terme général $u_n = a_k n^k + \dots + a_0$ est équivalente à son terme de plus haut degré non-nul (à $a_k n^k$, si $a_k \neq 0$).

PROPOSITION 61

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et non-nulle à pcr. Alors :

- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$

Démonstration — Ces résultats viennent d'un résultat plus général :

Soit f est une fonction dérivable en 0, et $(u_n)_{n \geq n_0}$ qui tend vers 0. Alors $f(u_n) - f(0) \sim f'(0)u_n$.

Cette propriété est exactement équivalente au fait que le taux d'accroissement $\frac{f(u_n) - f(0)}{u_n - 0}$ a pour limite $f'(0)$ quand u_n tend vers 0 (ce qui est vrai). □

EXERCICE 7 — Donner un équivalent à chacune des suites de terme général suivant :

1. $a_n = \frac{1}{2n+5}$
2. $b_n = \sqrt{2n^2 + 4n - 2}$
3. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
4. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
5. $w_n = \ln(2 - e^{-\frac{1}{n^2}})$

3 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans cette section, on étudie les suites récurrentes $(u_n)_n$ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction continue.

3.1 Généralités

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (ouvert/fermé, fini/infini).

DÉFINITION 62

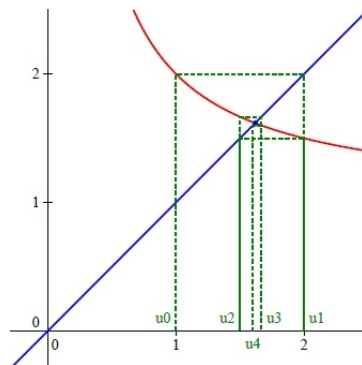
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $l \in I$ est un **point fixe** de f si l'on a $f(l) = l$.

THÉORÈME 63

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite récurrente avec $u_{n_0} \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite $l \in I$, alors on a $f(l) = l$.

Pour étudier la convergence de certaines suites récurrentes, il faut donc étudier les points fixes de certaines fonctions continues (les réels l tels que $f(l) = l$).



Une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui CV vers un point fixe de f .

3.2 Cas des fonctions continues croissantes

Voici une méthode générale pour traiter le cas des suites récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue et croissante.

Cela permet d'étudier un grand nombre de suites récurrentes.

MÉTHODE 64

- **Étude des variations et points fixes** : On détermine les variations de f , en traçant son tableau de variations si nécessaire. Puis, on résout l'équation $f(x) = x$ pour trouver les points fixes de f . Ils peuvent éventuellement correspondre à la limite de la suite.
- **Existence de la suite** : On montre par récurrence que tous les termes u_n sont bien dans l'ensemble I . Ainsi, $f(u_n)$ existe bien. (Etape parfois non demandée)
- **Monotonie de la suite** $(u_n)_n$: Lorsque la fonction est croissante, la suite $(u_n)_n$ est monotone.
Pour déterminer sa monotonie on étudie le signe de $u_1 - u_0$. Si $u_1 - u_0 \geq 0$ alors $(u_n)_n$ est croissante, mais si $u_1 - u_0 \leq 0$ alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- **Encadrement de la suite** : On montre (par récurrence en général) que les termes u_n sont majorés/minorés (selon la monotonie de la suite).
- **Convergence** : Si la suite u_n est croissante(décroissante) et qu'elle est majorée(minorée), elle est donc convergente. Et alors, la limite de $(u_n)_n$ est un point fixe de f sur I .
Si les termes de $(u_n)_n$ appartiennent à un ensemble I sur lequel f n'a pas de points fixes, on peut en déduire que la suite $(u_n)_n$ est divergente.

EXEMPLE 65 — (Étude d'une suite récurrente) Soit $(u_n)_n$ la suite récurrente définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

Alors $(u_n)_n$ est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction racine carrée, qui est continue sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante.

Déterminons les solutions de $\sqrt{x} = x$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \geq 0$,

$$\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

On en déduit que la fonction racine n'admet que deux points fixes qui sont 0 et 1.

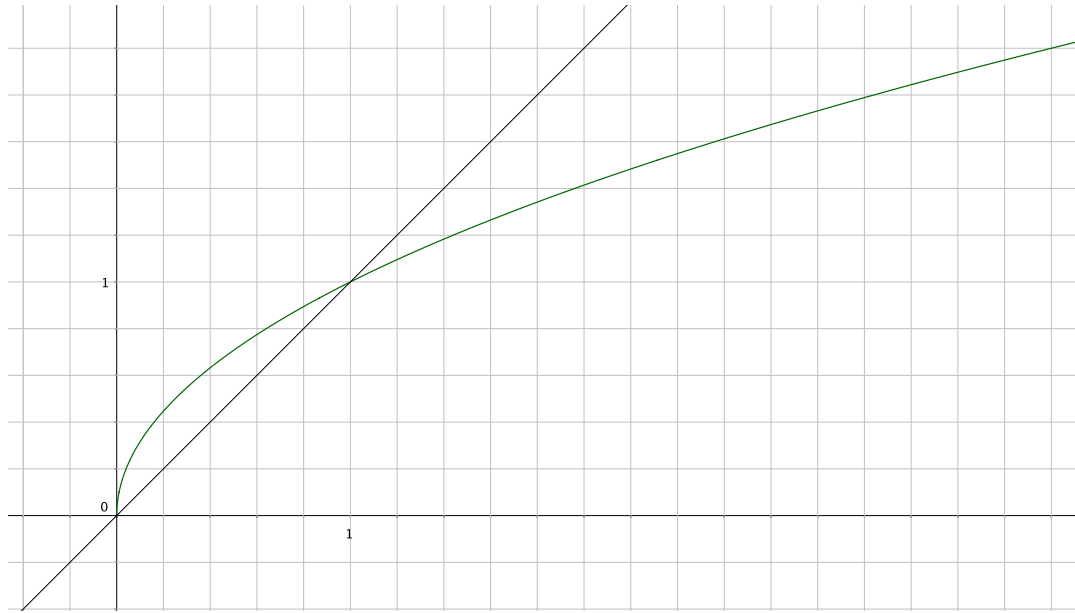
On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que le terme u_n existe bien et appartient à $[0, +\infty[$. (Dans l'hérédité, comme $u_n \geq 0$ alors $f(u_n)$ existe, et on a aussi $f(u_n) \geq 0$).

Nous avons précédemment mentionné que f était croissante, donc la suite $(u_n)_n$ est monotone, déterminons sa monotonie. On a $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} > u_0$. On en déduit que la suite u_n est croissante.

On montre ensuite par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que l'on a $0 \leq u_n \leq 1$. (Dans l'hérédité, comme $u_n \leq 1$ on a alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n} \leq 1$.)

Ainsi, la suite est croissante, de premier terme $\frac{1}{4}$ et majorée par 1, donc elle converge vers l'unique point fixe de f strictement plus grand que 0, qui est 1.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.



fixes de la fonction racine carrée

Points

EXERCICE 8 — Soit $f : x \in]0, +\infty[\mapsto 2\sqrt{x} - 1$. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 4$.

1. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 1$.
3. Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n \geq 0}$.
4. En déduire que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et préciser sa limite.

REMARQUE 66 — — Le cas d'une fonction continue décroissante s'étudie à partir de celui d'une fonction continue croissante. Nous le verrons en exercice.

— Si la fonction f est continue mais non monotone, beaucoup de comportements sont possibles. Une fonction comme $f : x \mapsto x^2 - x + 1$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$, et les suites récurrentes vérifiant $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$ peuvent avoir des comportements très différents selon la valeur du premier terme u_0 .

Par exemple, si $u_0 = 1$ la suite est périodique de période 2.

EXERCICE 9 — Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et que $u_n > 0$.
2. Quelles sont les limites possibles de la suite u ?
3. Étudier le sens de variation de $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier la convergence de ces deux sous-suites. On montrera que $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et que $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.
5. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

3.3 Cas des fonctions dérivables : Inégalité des accroissements finis

Un autre cas fonctionne particulièrement bien : celui où la fonction f est dérivable sur I et où sa dérivée f' est bornée, avec un nombre $k \in]0, 1[$ tel que $|f'| \leq k$.

En effet, prenons une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et notons l un point fixe de f sur I . On suppose avoir déjà vérifié que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie. Pour $n \in \mathbb{N}$, appliquons l'inégalité des accroissements finis à f , en u_n et l :

$$|f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l|.$$

Avec les relations $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(l) = l$, on obtient :

$$|u_{n+1} - l| \leq k|u_n - l|.$$

On peut alors démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|.$$

Comme le nombre k est dans $]0, 1[$, on a $k^n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. On peut ainsi appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir que $|u_n - l| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

Cette condition est équivalente à $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} l$, c'est-à-dire au fait que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers l .

EXERCICE 10 — Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4}$. On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq 1/2$.
3. Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle $[0, 1]$ et donner la valeur de α .
4. Étudier la convergence de $(u_n)_{n \geq 0}$.

4 Suites définies implicitement via une relation de la forme $f_n(u_n) = 0$

Ce genre de suite implicite est très différent du cas précédent.

Le contexte usuel est celui d'une famille $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions définies sur un même intervalle I .

On vérifie (en général via le TVI ou via le théorème de la bijection) que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution. On note u_n la solution en question.

On a ainsi créé une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que chaque terme vérifie $f_n(u_n) = 0$.

Le but est d'étudier la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

MÉTHODE 67 — On commence par dresser un tableau de variations de chaque fonction f_n sur I . Celles-ci seront en général continues et strictement monotones, donc bijectives de I vers $f_n(I)$.

- Pour déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, on étudie le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur I .

Comme on a $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = f_{n+1}(u_n) - 0$, on peut en déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$. Et comme f_{n+1} est strictement monotone, on en déduit la position de u_n par rapport à u_{n+1} .

- On teste un nombre a bien choisi comme potentiel majorant/minorant en regardant le signe $f_n(a)$. Grâce au tableau de variations de f_n , selon le signe de $f_n(a)$ on saura si l'on a $u_n \leq a$ ou $a \leq u_n$.

- On obtient en général une suite croissante majorée/décroissante minorée, et le théorème de convergence monotone peut être appliqué.

EXERCICE 11 ((D'après EDHEC 1997)) — Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = x - n \cdot \ln(x)$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
 (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.
 (a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
 (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
 (c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
 (d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

4.1 Suites définies via une relation de la forme $f(u_n) = n$

Cette situation est un cas particulier de la situation précédente. (On prend $f_n(x) = f(x) - n$) Etant donné qu'une seule fonction f entre en jeu, il y a une seule étude de fonction à faire. La monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et les majorations/minorations de u_n découlent du tableau de variations de f .

De plus, f est en général une bijection. Si l'on sait calculer sa bijection réciproque f^{-1} on a alors $u_n = f^{-1}(n)$. Autrement dit on peut aussi obtenir une expression explicite de u_n , et étudier sa convergence et son éventuelle limite grâce à l'expression de f^{-1} .

- EXERCICE 12 —
1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation $e^x + x - n = 0$ a une unique solution, que l'on notera u_n . (On pourra étudier la fonction $f : x \mapsto e^x + x$.)
 2. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ainsi définie.
 3. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n \leq \ln n$.
 Puis montrer que, pour n assez grand, $u_n \geq \ln(n) - 1$. (On pourra comparer $f(u_n)$ et $f(\ln(n) - 1)$).
 4. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

5 Généralités sur les séries numériques

Pour une série, au lieu de prendre des nombres u_n et de regarder leur comportement, on considère les sommes $\sum_{k=n_0}^n u_k$ et on regarde leur comportement.

Une **série est une suite** de sommes, où pour chaque indice suivant on rajoute un terme à la somme.

5.1 Séries convergentes, sommes

DÉFINITION 68

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle.

On définit la **série de terme général** u_n comme la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$, avec $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$.

Le nombre S_n est appelé **somme partielle** de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

En général, on note $\sum_{n \geq n_0} u_n = (S_n)_{n \geq n_0}$.

REMARQUE 69 — En général les séries sont définies à partir de 0 ($n_0 = 0$), ou à partir de 1.

Attention ! L'expression $\sum_{n \geq n_0} u_n$ désigne la série de terme général u_n , cela désigne une suite (et pas un nombre réel). Nous définirons par la suite le nombre réel $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ (s'il existe), et il ne faudra pas confondre les deux notations.

EXEMPLE 70 — La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ (pour $n \geq 1$) est définie par $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

Attention à ne pas confondre u_n et S_n .

Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ sont $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{4}$; $u_3 = \frac{1}{9}$.

Ceux de la série $(S_n)_{n \geq 1}$ sont $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $S_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$.

DÉFINITION 71 (**Convergence de séries, somme**)

Soit $(S_n)_{n \geq n_0}$ la série de terme général u_n .

On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est **convergente** si la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ est convergente.

Et, la **somme de la série** $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est la limite de la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$, notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Si la série n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.

On définit la **nature** d'une série comme l'information sur sa convergence ou divergence.

REMARQUE 72 — **Attention !** La convergence de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ et celle de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ne sont pas du tout la même chose !

Ces deux suites ont des liens entre elles (on le verra par la suite), mais il faut bien voir que ce sont deux suites différentes.

Attention ! La somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ d'une série convergente est définie comme la limite d'une suite. Une somme infinie est définie comme la limite d'une suite de sommes finies.

Quand vous êtes en face d'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$, il faut toujours commencer par étudier la convergence de celle-ci (voir si la suite des sommes partielles $\sum_{k=n_0}^n u_k$ converge ou non).

EXEMPLE 73 — Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{1}{10^n}$, et étudions la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

On a $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^k} = \frac{\frac{1}{10^{n+1}} - 1}{\frac{1}{10} - 1}$.

Comme $(\frac{1}{10})^n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, on obtient donc que la somme partielle S_n converge vers $\frac{0 - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{10}{9}$.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, et sa somme vaut $\frac{10}{9}$.

Ainsi : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{10}{9}$.

EXEMPLE 74 — Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = 2 - \frac{1}{n}$. Alors la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente, de limite 2.

Regardons la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

Pour tout $k \geq 1$ on a $v_k \geq 1$, donc $\sum_{k=1}^n v_k \geq \sum_{k=1}^n 1 = n$.

D'après le théorème de comparaison, la suite des sommes partielles $(\sum_{k=1}^n v_k)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

La série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est divergente vers $+\infty$.

On écrira parfois : $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = +\infty$.

REMARQUE 75 (Relation de récurrence) —

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite, et soit $(S_n)_{n \geq n_0}$ la suite des sommes partielles de la série associée.

Alors, pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$, on a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$.

La suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ est construite comme une suite récurrente, là où la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne l'est pas forcément.

EXEMPLE 76 — Il est bien plus facile de montrer qu'une série est convergente que de calculer sa limite. Souvent, on saura que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente, mais sans pouvoir calculer autrement

la valeur de cette série.

Posons par exemple, pour $n \geq 0$, $u_n = \frac{1}{10^n} (1 - \frac{1}{1+n^{15}})$.

On a $u_n \geq 0$, donc la relation $\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_{n+1} + \sum_{k=0}^n u_k$ implique que la suite des sommes partielles

$(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \geq 0}$ est une suite croissante.

De plus, on a $u_n < \frac{1}{10^n}$, donc $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^k} = \frac{\frac{1}{10^{n+1}} - 1}{\frac{1}{10} - 1} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$.

La suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^n u_k)_{n \geq 0}$ est donc majorée.

Une suite croissante majorée est convergente, donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

Mais, on ne sait pas calculer la valeur de sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. (on sait seulement que c'est un réel compris entre 0 et $\frac{10}{9}$)

REMARQUE 77 — Pour une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ convergente, on pourra abréger cela en CV.

Pour une série $\sum_{n \geq n_0} v_n$ divergente, on pourra abréger cela en DV.

Les méthodes d'étude à utiliser dépendent du type de la série étudiée.

Deux grandes familles de séries sont à identifier : les séries à termes positifs, et les séries absolument convergentes.

5.2 Séries à termes positifs

DÉFINITION 78 (Série à termes positifs)

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série.

On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est **à termes positifs** si pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ on a $u_n \geq 0$.

Elles sont plus pratiques à étudier car on ne se préoccupe pas du signe de u_n , et car ces séries sont croissantes.

PROPOSITION 79 (Convergence d'une série à termes positifs)

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série à termes positifs.

Alors, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq n_0}$ est majorée.

Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Les séries absolument convergentes reposent sur les séries à termes positifs.

5.3 Séries absolument convergentes**DÉFINITION 80 (Série absolument convergente)**

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série.

On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge.

On abrège cela en AC .

PROPOSITION 81

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série absolument convergente.

Alors, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente.

REMARQUE 82 — **Attention !** la réciproque est fausse.

Nous verrons un contre-exemple par la suite. (la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$)

5.4 Propriétés des séries et de leur somme**PROPOSITION 83**

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série convergente. Alors, son terme général u_n converge vers 0.

REMARQUE 84 — **Attention !** La réciproque est fausse.

Nous verrons un contre-exemple avec la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

EXEMPLE 85 — On utilise surtout la contraposée de ce critère : Si le terme général u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est divergente.

Par exemple, la série de terme général $(-1)^n$ ne converge pas.

PROPOSITION 86 (Linéarité de la somme)

Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$, $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries convergentes, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. La série $\sum_{n \geq n_0} (u_n + v_n)$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k)$.
2. La série $\sum_{n \geq n_0} \lambda u_n$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

REMARQUE 87 — Attention ! On peut ajouter deux séries convergentes entre elles, mais on ne peut pas décomposer une série convergente en deux morceaux sans précautions.

Par exemple, en prenant $u_n = \frac{1}{10^n}$, on a vu que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

On peut bien écrire $u_n = 2 + \frac{1}{10^n} - 2$, mais les séries $\sum_{n \geq 0} (2 + \frac{1}{10^n})$ et $\sum_{n \geq 0} -2$ sont divergentes. (on a rajouté et soustrait un terme de série divergente)

PROPOSITION 88

Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$, $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries, avec l'une convergente et l'autre divergente.

Alors, la série $\sum_{n \geq n_0} u_n + v_n$ est divergente.

Démonstration — Considérons $\sum_{n \geq n_0} v_n$ divergente. Si l'on suppose que la somme de ces deux séries est convergente, alors $\sum_{n \geq n_0} v_n = (\sum_{n \geq n_0} u_n + v_n) - \sum_{n \geq n_0} u_n$ serait convergente, ce qui est absurde. Cette somme est donc divergente. $\square$

5.5 Théorème de comparaison**PROPOSITION 89 (Théorème de comparaison)**

Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$, $\sum_{n \geq n_0} v_n$ des séries à termes positifs, telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_1 .

- Si la série $\sum_{n \geq n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est aussi convergente.
- Si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge vers $+\infty$, alors la série $\sum_{n \geq n_0} v_n$ diverge vers $+\infty$.

Nous avons utilisé implicitement ce résultat pour démontrer que la série des $\frac{1}{10^n}(1 - \frac{1}{1+n^{15}})$ est convergente. Son terme général est positif et est majoré par $\frac{1}{10^n}$, qui est le terme général d'une série convergente.

5.6 Séries à termes généraux équivalents**THÉORÈME 90 (Séries à termes généraux équivalents)**

Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$, $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n \sim v_n$.

Alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente si et seulement si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ est convergente.

EXEMPLE 91 — Pour la série des $\frac{1}{10^n}(1 - \frac{1}{1+n^{15}})$, cette série est à termes positifs, et on a $\frac{1}{10^n}(1 - \frac{1}{1+n^{15}}) \sim \frac{1}{10^n}$.

Comme la série des $\frac{1}{10^n}$ est convergente, cette série est convergente.

5.7 Séries et négligeabilité

THÉORÈME 92 (**Séries et négligeabilité**)

Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$, $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries, telles que $u_n = o(v_n)$.

Si $\sum_{n \geq n_0} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente.

Ce résultat est particulièrement utile avec les croissances comparées, qui fournissent beaucoup de négligeabilité. En général, il est plus facile de trouver de la négligeabilité que de l'équivalence.

EXEMPLE 93 — Pour $n \in \mathbb{N}$ posons $u_n = \frac{5^n}{n!}$.

D'après les croissances comparées, on a $u_n = o(\frac{1}{2^n})$. En effet, $\frac{u_n}{\frac{1}{2^n}} = \frac{5^n \cdot 2^n}{n!} = \frac{10^n}{n!} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

Or, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{5^n}{n!}$ est convergente.

Cet argument permet de démontrer la convergence de toutes les séries exponentielles.

5.8 Comparaison série-intégrale

THÉORÈME 94 (**Critère de comparaison série-intégrale**)

Soient $a \in \mathbb{N}$, et $f : [a, +\infty[$ une fonction positive, continue, et décroissante.

Pour $n \in \llbracket a, +\infty \rrbracket$, on pose $u_n = f(n)$.

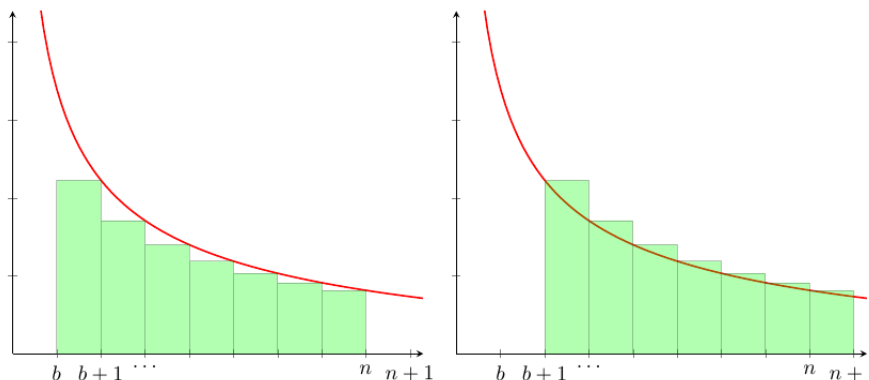
- Pour tout $n \in \llbracket a+1, +\infty \rrbracket$, on a :

$$\int_{n-1}^n f(t) dt \geq f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t) dt \quad (\text{Méthode des rectangles})$$

- Pour tous $b \in \llbracket a+1, +\infty \rrbracket$ et $n \in \llbracket b, +\infty \rrbracket$, on a :

$$\int_b^n f(t) dt \geq \sum_{k=b+1}^n f(k) \geq \int_{b+1}^{n+1} f(t) dt, \quad (\text{Comparaison série-intégrale}).$$

- La série $\sum_{n \geq a} u_n$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.



Comparaison série-intégrale. Majoration (à gauche) et minoration (à droite) de $\sum_{k=b+1}^n f(k)$.

EXEMPLE 95 — Pour la série de terme général $\frac{1}{n \ln(n)}$ (pour $n \geq 2$), en posant $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$, on remarque que $\frac{1}{n \ln(n)} = f(n)$ et que la fonction f est continue, positive, et décroissante sur $[2, +\infty[$. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ a donc la même nature que la suite $(\int_2^n \frac{1}{t \ln(t)} dt)_{n \geq 2}$.

La comparaison série-intégrale fournit :

$$\int_3^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} = S_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \int_2^n \frac{1}{x \ln(x)} dx.$$

La fonction f est de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(t) = \ln(t)$. Une primitive est donc $t \mapsto \ln(\ln(t))$.

Ainsi, on a $\int_3^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_3^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3))$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(n)) = +\infty$, on en déduit que $\int_3^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Le théorème de comparaison implique que $S_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge vers $+\infty$.

EXEMPLE 96 — Etudions la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. C'est une série à termes positifs. En posant $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$,

on a $f(n) = \frac{1}{n^2}$. La fonction f est continue, décroissante, et positive sur $[1, +\infty[$.

Donc, par comparaison série-intégrale, on obtient :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x^2} dx \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} = S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx.$$

Une primitive de f est $x \mapsto -\frac{1}{x}$. On a donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + 1 \leq S_n \leq \frac{1}{1} - \frac{1}{n} + 1$.

La suite S_n est ainsi majorée par une suite convergente, donc la suite S_n est majorée (majorée par 3 par exemple). D'après le critère de convergence des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Cette méthode permet de démontrer la convergence de toutes les séries de Riemann de paramètre $s > 1$.

En combinant le résultat sur la négligeabilité et celui sur la comparaison série-intégrale, on obtient la méthode suivante :

5.9 Séries et croissances comparées

MÉTHODE 97 (Montrer qu'une série est convergente via les croissances comparées)

Cette méthode s'applique aux séries dont le terme général est de la forme $\frac{a_n}{b_n}$, avec b_n un terme qui domine a_n d'après les croissances comparées, et de la forme n^c avec $c > 1$, q^n avec $q > 1$, $n!$, ou n^n .

Alors, la série $\sum_{n \geq n_0} \frac{a_n}{b_n}$ est convergente.

En effet :

- Si b_n est de la forme q^n ($q > 1$), ou $n!$, ou n^n , alors on aura $\frac{n^2 \cdot a_n}{b_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après les croissances comparées.

Donc, on a $\frac{a_n}{b_n} = o(\frac{1}{n^2})$.

Or, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum_{n \geq n_0} \frac{a_n}{b_n}$ est convergente.

- Si b_n est de la forme n^c avec $c > 1$, alors on aura $\frac{n^{1+\frac{\epsilon}{2}} \cdot a_n}{b_n} \rightarrow_n 0$ d'après les croissances comparées.

Donc, on a $\frac{a_n}{b_n} = o(\frac{1}{n^{1+\frac{\epsilon}{2}}})$.

Or, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$ est convergente, donc la série $\sum_{n \geq n_0} \frac{a_n}{b_n}$ est convergente.

Cette méthode demande plus de précision pour être utilisée mais permet de montrer facilement que d'autres séries convergent.

EXEMPLE 98 — Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$ et $v_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. Montrons que les séries $\sum_{n \geq 2} u_n$ et

$\sum_{n \geq 2} v_n$ sont convergentes.

Premièrement, ce sont deux séries à termes positifs.

• D'après les croissances comparées, on a $\frac{n^{10} \cdot n^2}{2^n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, on a $u_n = o(\frac{1}{n^2})$.

Or, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente. • D'après

les croissances comparées, on a $\frac{\ln(n)n^{\frac{3}{2}}}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, on a $v_n = o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$.

Or, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente, donc la série $\sum_{n \geq n_0} v_n$ est convergente.

Dans le cas de la suite $(v_n)_{n \geq 2}$, on a dû choisir un terme de la forme n^d avec $d < 2$ pour que $v_n \cdot n^d \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées, et avec $d > 1$ pour que la série des $\frac{1}{n^d}$ soit convergente (cf. séries de Riemann). Le nombre $d = \frac{3}{2}$ respecte ces deux conditions.

REMARQUE 99 — Les théorèmes ou méthodes pour déterminer la convergence ou calculer la somme d'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont nombreux (comparaison, équivalence, négligeabilité, série classique, encadrement série-intégrale).

Il est courant que plusieurs de ces résultats s'appliquent sur une même série. Dans ce cas, il s'agit de choisir la méthode qui fournira le résultat le plus rapidement possible.

L'objectif est de maîtriser l'ensemble de ces résultats afin de pouvoir étudier le plus grand nombre de séries possibles.

6 Séries usuelles

6.1 Séries télescopiques

DÉFINITION 100 (Séries télescopiques)

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série.

On dit que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une **série télescopique** s'il existe une suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ telle que, pour tout

$n \geq 0$, on a $u_n = v_{n+1} - v_n$.

On l'écrit aussi $\sum_{n \geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$.

PROPOSITION 101 (Convergence des séries télescopiques)

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série télescopique, avec $u_n = v_{n+1} - v_n$.

Alors, la série télescopique $\sum_{n \geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente si et seulement si la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est convergente.

De plus, si la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ converge, on a $\sum_{k=n_0}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) - v_{n_0}$.

Démonstration — La somme partielle est une somme télescopique. On a donc : $\sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{k=n_0}^n v_{k+1} - v_k = v_{n+1} - v_{n_0}$.
Cela permet d'obtenir tous les résultats de l'énoncé. $\square$

EXEMPLE 102 — On veut étudier (nature, somme) la série de terme général $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, pour $n \geq 2$.

C'est une série à termes négatifs. Transformons l'expression :

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}\right) = \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n) = (\ln(n-1) - \ln(n)) + (\ln(n+1) - \ln(n))$$

On reconnaît deux termes généraux de séries télescopiques.

$$\text{On a } \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) = \ln(1) - \ln(n) = 0 - \ln(n).$$

$$\text{Et, } \sum_{k=2}^n (\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(n+1) - \ln(2).$$

$$\text{Donc, } \sum_{k=2}^n u_k = -\ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(2) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(2).$$

Cette suite est donc convergente, vers $-\ln(2)$.

$$\text{Ainsi, la série est convergente, et } \sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2).$$

On peut remarquer ici que les deux séries télescopiques identifiées sont divergentes, mais que leur différence est convergente (les "termes dominants" se compensent).

6.2 Séries géométriques

DÉFINITION 103 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{R}$.

La série $\sum_{n \geq 0} q^n$ est appelée **série géométrique** de raison q .

PROPOSITION 104 (Convergence des séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- La série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$.

$$\text{Dans ce cas, on a } \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

- Pour $q = 1$ ou $q > 1$, la série diverge vers $+\infty$.
- Pour $q = -1$, la série diverge. Elle est périodique de période 2.
- Pour $q < -1$, la série diverge.

6.3 Séries géométriques dérivées

DÉFINITION 105 (Séries géométriques dérivées)

Soit $q \in \mathbb{R}$.

La série $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ est appelée **série géométrique dérivée** de raison q .

La série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ est appelée **série géométrique dérivée seconde** de raison q .

PROPOSITION 106 (Convergence des séries géométriques dérivée)

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Les séries géométriques dérivées $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ sont convergentes si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas, on a $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

6.4 Série harmonique, séries de Riemann**DÉFINITION 107 (Série harmonique)**

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ (avec $n \geq 1$) est appelée **série harmonique**.

Son terme général est $\frac{1}{n}$.

PROPOSITION 108

La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Plus précisément, on a $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

La série harmonique est divergente, mais très lentement (à vitesse logarithmique). Pour $n = 1.000.000 = 10^6$, la somme partielle est équivalente à $\ln(10^6) = 6 \ln(10)$ soit environ 13,8.

DÉFINITION 109 (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée **série de Riemann** de paramètre α .

Son terme général est $\frac{1}{n^\alpha}$.

PROPOSITION 110 (Convergence des séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \leq 1$, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

Pour $\alpha < 1$, on a $S_n \sim \frac{1}{|\alpha-1|n^{\alpha-1}}$.

Pour $\alpha = 1$ on a $S_n \sim \ln(n)$. (série harmonique)

- Si $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

Les séries de Riemann sont un exemple fondamental de séries convergentes/divergentes. Dans beaucoup de cas, on se contente de comparer une série de terme u_n à une série de Riemann, pour conclure sur sa convergence ou non.

En particulier, on trouve que la série des $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

6.5 Séries exponentielles**DÉFINITION 111 (Séries exponentielles)**

Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est appelée **série exponentielle** de paramètre x .

Son terme général est $\frac{x^n}{n!}$.

PROPOSITION 112 (Série exponentielle)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente.

De plus, $a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$.

EXEMPLE 113 — Quand on choisit $x = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

On peut donc calculer une valeur approchée de e de cette façon, et retrouver que $e \simeq 2,7$.

De même, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \simeq 0,37$.

6.6 Séries alternées, séries logarithmes**EXEMPLE 114 — (Série alternée)**

Voici un exemple de série convergente, mais pas absolument convergente.

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, et l'on étudie la série associée.

On remarque que le signe de u_n alterne entre positif et négatif, alors que la valeur de $|u_n|$ décroît vers 0.

Pour montrer que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente, on va séparer l'étude des termes d'indices pairs et impairs, et utiliser le critère des suites adjacentes.

La suite $(S_{2n})_{n \geq 1}$ des termes d'indice pair est croissante car

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0.$$

De même la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ des termes d'indice impairs est décroissante (on a $S_{2n+3} - S_{2n+1} < 0$).

De plus, la différence $S_{2n+1} - S_{2n}$ est égale à $\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1}$, et tend donc vers 0.

Les deux suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes, et convergent donc vers une limite commune. Ainsi la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

En fait, l'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$. (HP)

Par contre, la série des $|u_n|$ est la série de terme général $\frac{1}{n}$, qui n'est pas convergente.

La série des $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente, mais pas absolument convergente.

PROPOSITION 115 (Séries logarithmes)

Soit $x \in]-1, 1[$. Alors, la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ est convergente. De plus, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} = \ln(1+x).$$

Démonstration — Cette série est une série dite alternée (HP). Montrer sa convergence se fait comme dans l'exemple précédent. On montre que sa somme vaut $\ln(1+x)$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange. (HP) $\square$

REMARQUE 116 — Les sommes de séries géométrique, exponentielle, logarithme donnent les fonctions $\frac{1}{1-x}$, $\exp(x)$, $\ln(1+x)$.

7 Bilan des méthodes

Lorsque l'on est face à une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$, on regardera plus ou moins dans l'ordre :

- Le terme de départ de la série.
Cela permet d'écrire les sommes partielles S_n sans erreurs.
- Les premières valeurs des sommes partielles S_n .
Cela permet parfois de constater des valeurs particulières, une croissance, des oscillations, une divergence.
- Le signe de u_n quand n tend vers $+\infty$.
Si le signe de u_n est constant à partir d'un certain rang, on pourra utiliser les résultats du cours sur les séries à termes positifs.
Sinon, on ne peut pas utiliser ces résultats (les appliquer serait totalement faux).
- La limite de u_n quand $n \rightarrow +\infty$.
Si $u_n \rightarrow 0$ la série peut être convergente.
Sinon, elle est divergente.
- L'expression de u_n par rapport aux séries classiques.
Si u_n s'écrit comme une combinaison linéaire de séries classiques (ex : $u_n = \frac{3}{2^n} - \frac{4}{n^2}$, on peut obtenir la nature de la série à partir des séries classiques.
Attention, cela ne fonctionne pas pour les produits de termes généraux (la série de terme $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ est CV)
- Si u_n s'écrit de la forme $v_{n+1} - v_n$.
Cela donne une série télescopique, qui se calcule alors très facilement.
- Un équivalent de u_n . (Pour séries à termes positifs)
Pour obtenir un équivalent on pourra utiliser une factorisation par le terme dominant (mais pas les croissances comparées).
Il n'est pas toujours possible d'obtenir un équivalent plus simple.
En général, quand on obtient $u_n \sim v_n$, le terme v_n est un terme général de série usuelle (à une constante près).
Alors la nature de $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est la même que celle de $\sum_{n \geq n_0} v_n$.
- Une éventuelle négligeabilité pour u_n .
Si l'on voit que u_n a l'air "petit" et que l'on peut montrer que $u_n = o(v_n)$ avec v_n le terme général d'une série usuelle convergente, on obtient alors la convergence de $\sum_{n \geq n_0} u_n$.
- Si u_n s'écrit de la forme $\frac{a_n}{b_n}$ avec la possibilité d'appliquer les croissances comparées entre a_n et b_n . (Pour séries à termes positifs)
Si b_n est de la forme n^b ($b > 1$) ou a^n ($a > 1$) ou $n!$ ou n^n , on peut alors montrer que la série est convergente en utilisant la méthode des croissances comparées, grâce à une majoration à partir d'un certain rang.
- Une majoration/minoration de u_n . (Pour séries à termes positifs)
Il suffit que la majoration soit vraie à partir d'un certain rang.
En général une majoration est plus technique à obtenir qu'un équivalent.
Si $u_n \leq v_n$ avec $\sum_{n \geq n_0} v_n$ CV, alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est CV.
Si $v_n \leq u_n$ avec $\sum_{n \geq n_0} v_n$ DV, alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est DV.
- Un encadrement série-intégrale. (Pour séries à termes positifs)
On écrit u_n comme $f(n)$, avec f une fonction continue, positive, décroissante.
Il faut pouvoir calculer une primitive F de f , sinon la méthode n'est pas utile.
On fait un dessin au brouillon de la courbe de f , des valeurs de u_n , et des intégrales de f entre $n-1$ et n et entre n et $n+1$.
Si $F(n)$ est majorée quand $n \rightarrow +\infty$, alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est CV. Si $F(n) \rightarrow +\infty$ alors la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est DV.
On peut de plus obtenir un équivalent de S_n en changeant les bornes de l'encadrement série-intégrale.

- Si u_n n'est pas toujours positif, étudier la série $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ et voir si $|u_n|$ vérifie l'un des critères de convergence précédents.

La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sera alors absolument convergente, ce qui implique qu'elle est convergente.

Ces éléments permettent d'étudier la majorité des séries que vous rencontrerez. Les premières informations ne sont pas suffisantes pour montrer la CV/DV d'une série, mais permettent de mieux comprendre comment se comporte la série et ainsi trouver le résultat/le calcul qui permet de trouver la nature de $\sum_{n \geq n_0} u_n$.

Pour les exemples et contre-exemples classiques, il faut se référer aux séries usuelles $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2^n}, \frac{(-1)^n}{n}, \frac{1}{n!})$.

Pour le calcul de la somme d'une série, les approximations (équivalent, négligeabilité, croissances comparées, majoration/minoration) sont inutiles.

En général il faut réécrire le terme u_n comme une somme de termes de séries usuelles, déterminer une relation particulière pour S_n , ou utiliser une méthode spécifique.

Calculer la somme d'une série est bien plus compliqué en général que déterminer sa convergence/divergence.

Bilan du contenu nécessaire à maîtriser :

- $(u_n)_{n \geq 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \geq 0}$ si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. On le note $u_n = o(v_n)$.
 $(u_n)_{n \geq 0}$ est équivalente à $(v_n)_{n \geq 0}$ si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$. On le note $u_n \sim v_n$.
- La relation $u_n = o(v_n)$ n'est pas symétrique. Pour $u_n = o(n^2)$ on a $u_n = o(n^4)$, mais si $v_n = o(n^4)$ rien n'assure que $v_n = o(n^2)$.
- Règles de calculs des o : $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$, $o(v_n)o(w_n) = o(v_n w_n)$, $o(v_n) = v_n o(1)$, $o(\lambda v_n) = o(v_n)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$), $o(o(v_n)) = o(v_n)$.
- Règles de calcul pour des équivalents : Si $u_n \sim v_n$ on a $v_n \sim u_n$, et $u_n^a \sim v_n^a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
 Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ on a $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
 Contre-ex : $n^2 + 1 \sim n^2 + n$, $-n^2 + 1 \sim -n^2 + n$, mais $(n^2 + 1) + (-n^2 + 1) \not\sim (n^2 + n) + (-n^2 + n)$.
 Rem : Les notations $u_n = o(0)$ et $u_n \sim 0$ n'ont pas de sens.
- On a $u_n = o(1)$ ssi $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est CV, de limite λ , ssi $u_n = \lambda + o(1)$.
 Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \lambda$ ssi $u_n \sim \lambda$. (Faux pour $\lambda = 0$)
 Savoir calculer un équivalent d'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ pour déterminer son comportement (convergence, divergence). Savoir utiliser les o pour montrer la convergence d'une suite (en général vers 0).
- Connaître les croissances comparées pour les suites.
- Définition du point fixe pour une fonction f ($f(l) = l$).
- Suites récurrentes construites via " $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ ".
 Définition d'un ensemble F stable pour une fonction f . Si $u_0 \in F$, alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ existe. Si la limite l existe dans D_f , c'est un point fixe de f ($f(l) = l$). Si f est croissante sur F , la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est monotone (dépend du signe de $f(u_0) - u_0$).
- Utiliser l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF) pour encadrer $|f(x) - f(y)|$, à appliquer pour u_n et l , dans le cas où f' ne prend que de petites valeurs ($|f'| \leq k < 1$).
- Suites implicites définies par la relation $f_n(u_n) = 0$.
 L'existence vient de l'étude des fonctions f_n .
 La monotonie de la suite $(u_n)_n$ s'étudie via le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
- Suites implicites définies par la relation $f(u_n) = n$.
 L'existence vient de l'étude de la fonction f .
 La monotonie et la limite de la suite $(u_n)_n$ s'étudient via le tableau de variations de f .
- Définition d'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Somme partielle S_n . Nature (convergente/divergente), somme $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$. Série absolument convergente.
- Connaître les propriétés des séries convergentes : Le terme général u_n tend vers 0, somme et multiples de séries CV.
- Savoir prouver correctement la convergence d'une série : Critère de convergence des séries à termes positifs. Propriété des séries absolument convergentes. Encadrement de séries à termes positifs. Critère de comparaison série-intégrale. Séries à termes généraux équivalents. Terme général négligeable devant un autre. Méthode des croissances comparées.
- Connaître les exemples de référence (déf, nature, somme) : Série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$, série télescopique $\sum_{n \geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$, série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, séries géométriques dérivées $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$, séries de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$, série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.
- Savoir utiliser les exemples de référence pour montrer qu'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente ou divergente (comparaison, équivalent).
 Savoir déterminer la somme d'une série à partir des séries de référence.
- Savoir effectuer un calcul de somme de série dans un cas simple ou classique.