

FEUILLE DE TD N° 1

Suites et séries 2

■ Suites récurrentes

Exercice 1.

1. Donner une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ croissante et convergente.
2. Donner une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ décroissante et convergente.
3. Donner une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ convergente mais pas monotone.
4. Donner une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui tend vers $+\infty$.
5. Donner une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui tend vers $+\infty$ mais qui n'est pas croissante.
6. Donner une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui n'a pas de limite quand $n \rightarrow +\infty$.
7. Donner une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui n'a pas de limite, et qui est non-majorée.
8. Donner une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ qui n'a pas de limite, qui est bornée, et qui n'est pas périodique.

Exercice 2. Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}$. Calculer le terme général de $(u_n)_{n \geq 0}$ pour :

- | | |
|---|---|
| 1. $u_0 = -1,$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3.$ | $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$ |
| 2. $u_0 = 1,$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2.$ | 5. $u_0 = 2,$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n.$ |
| 3. $u_0 = 1, u_1 = 0$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + u_{n-1} + u_{n-2} = 0.$ | 6. (*) $u_0 = 3,$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$ |
| 4. $u_0 = 2, u_1 = 5,$ | 7. (*) $u_0 = a,$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = bu_n^2.$ |

■ Encadrement

Exercice 3. Est-ce que le produit de deux suites minorées est une suite minorée ? Est-ce que le produit de deux suites majorées et négatives est une suite majorée ?

■ Monotonie

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$ et on considère l'équation $f_n(x) = 0$.

1. Démontrer qu'il existe une unique racine positive a_n à cette équation. On pourra étudier les fonctions f_n pour $n \geq 1$.
 2. Montrer que $f_{n+1}(a_n) \geq 0$. Puis, montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
 3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$.
- Indice : Calculer $a_n^{n+1} - 1$.

■ Limites de suites

Exercice 5. Déterminer la limite des suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ de terme général :

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $u_n = \frac{n^2}{\ln(n)}$ | On utilisera une quantité conjuguée. |
| 2. $u_n = \sqrt{n} - n^{\frac{1}{3}}$ | |
| 3. $u_n = \frac{n^7}{(n+1)^7}$ | |
| 4. $u_n = \frac{n!}{n^2}$ | |
| 5. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+4}}$ | |
| 6. $u_n = \frac{\sqrt{n}2^n - e^n n^2}{3^n}$ | |
| 7. $u_n = \frac{5^{2n}}{4^{4n}}$ | |
| 8. $u_n = -n^5 + 10n^4 + 150000n$ | |
| 9. $u_n = n^{100}2^n - \ln(n)n!$ | |

Exercice 6. Soit $n \geq 1$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{n}$.

1. Montrer que $(S_{2n})_{n \geq 1}$ est croissante.
2. Déterminer la monotonie de $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$.
3. Que peut-on dire sur $S_{2n+1} - S_{2n}$?
4. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente, et donner une valeur approchée à 0.25 près de sa limite.

Exercice 7. On considère deux suites $u = (u_n)_{n \geq 1}$ et $v = (v_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n! \times n}$$

1. Montrer que les deux suites u et v sont adjacentes.
2. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer en fonction de l la limite de la suite de terme général :

$$\sum_{k=0}^n \frac{ak + b}{k!}$$

3. (*) Montrer que la limite commune de u et v est un nombre irrationnel.

Indice : Raisonner par l'absurde.

Exercice 8. Déterminer un équivalent simple de la suite dont le terme général est :

1. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$
2. $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
3. $w_n = n^{\frac{1}{n}}$.
4. $z_n = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

5. $u_n = (1 + \frac{a}{n})^n$, pour $a \in \mathbb{R}$.

On pourra utiliser le fait que $x = \exp(\ln(x))$, $\forall x > 0$.

6. $v_n = \frac{(n+1)^{1/3} - n^{1/3}}{n}$

7. (*) $y_n = \left(\frac{3n+3}{7n+1}\right)^n$

On pourra s'aider de la question 5).

Exercice 9. Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3}$
2. $u_n = (n + 3 \ln(n))e^{-(n+1)}$
3. $u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}\right)$

Donner, si elle existe, leur limite pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 10. (*) On considère la suite récurrente $(u_n)_{n \geq 0}$ qui vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!.$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de n .

On pourra poser la suite de terme général $v_n = \frac{u_n}{n!}$.

Exercice 11. On définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ par : $x_0 > 0$ et, $\forall n \geq 0$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n existe et $x_n > 0$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
3. Déterminer la limite éventuelle de $(x_n)_{n \geq 0}$. Cette suite est-elle convergente ?

4. Montrer que $(x_{n+1}^2 - x_n^2)_{n \geq 0}$ tend vers une limite finie, et déterminer cette limite.

5. Quelle est la limite de $(\frac{1}{x_n^2})_{n \geq 0}$?

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. On admet que cette suite est bien définie.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n > 0$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1; 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, et que $f([1; 2]) \subset [1; 2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 14. On considère la fonction f définie sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{x}{\ln x + 1}$.

1. Étudier les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
2. Déterminer les points fixes de f .
3. On définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ par $x_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
 - (a) Étudier sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{(x+1)^2}$.
En déduire : $\forall x \in]1; +\infty[, 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n existe et $x_n > 1$.
 - (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1|$.

(d) Puis, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - 1| \leq \frac{1}{4^n}$.

(e) En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 15. Pour chaque série, donner un indice initial convenable, et étudier leur nature (distinguer selon la valeur de $x \in \mathbb{R}$ pour les séries avec un paramètre x).

$$\begin{array}{ll} \bullet \sum_n \frac{2n^2}{n^3 - 1} & \bullet \sum_n \frac{n(n-1)x^n}{n!} \\ \bullet \sum_n \frac{1}{2^{2n+1}} & \bullet \sum_n \frac{4(-1)^n}{n!} \\ \bullet \sum_n \frac{e^n}{3^n} & \bullet \sum_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ \bullet \sum_n e^{-nx} & \bullet \sum_n \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \end{array}$$

Pour chaque série convergente, essayer de calculer leur somme. Certaines sont plus difficiles que d'autres.

Exercice 16. Déterminer la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{k^3 \cdot 5^k}{k!}$.

Exercice 17. Pour $a < 0$, déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)^a}{x}$.

A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)^a}{n}$.

Exercice 18. Étudier la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

$$\begin{array}{ll} \bullet \sum_n \frac{1}{n^3 + 2^n} & \bullet \sum_n \frac{1}{n^2 - n} \\ \bullet \sum_n \ln \frac{n^2 + n^4}{2n^4} & \bullet \sum_n \sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}} \\ \bullet \sum_n \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} & \bullet \sum_n \frac{n^2}{n!} \\ \bullet \sum_n \ln \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2n} & \bullet \sum_n \frac{\ln n}{3^n} \end{array}$$

On précisera un indice initial convenable pour chaque série.

Exercice 19. Soit u_n une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$, $\forall n \geq 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente, et préciser sa limite.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $v_n = \ln u_n$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et u_n .
3. Calculer la somme partielle entre 0 et N de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{N+1} .
4. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 20. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$, puis $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 21 (Critère de convergente des séries alternées). Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels positifs, décroissante, telle que $a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

On veut montrer que la série $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente.

1. Montrer que les suites de sommes partielles $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente.
3. Une telle série est-elle toujours absolument convergente ?
4. (*) Constuire deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $\sum_n u_n$ CV et $\sum_n v_n$ DV,

et telles que $u_n \sim v_n$.

On pourra s'aider des questions précédentes.

Cela démontre que la proposition sur les séries de termes généraux équivalents est fausse si l'on sort du cadre des séries à termes positifs.