

## PROGRAMME DE COLLE - COLLE N° 2

## ■ Suites réelles ■

- Définition de suite, suite majorée, minorée, bornée, monotone, convergente et divergente. Savoir montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  vérifie l'une de ces propriétés.
- Savoir calculer le terme général d'une suite arithmétique ( $u_{n+1} = u_n + b$ ), géométrique, arithmético-géométrique ( $u_{n+1} = au_n + b$ ), et récurrente linéaire d'ordre 2.
- Limite d'une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$ . Limite finie, limite infinie. Limite d'une somme, d'un produit de suites convergentes.  
On fera attention aux formes indéterminées  $(+\infty, 0, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \dots)$ .
- Théorème de convergence monotone : Une suite croissante converge ssi elle est majorée. Sinon elle diverge vers  $+\infty$ . Une suite décroissante converge ssi elle est minorée. Sinon elle diverge vers  $-\infty$ .
- Convergence et limite de la suite géométrique de terme général  $u_n = q^n$ .
- Théorème de comparaison. Théorème des gendarmes.
- Suites adjacentes, définition. Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.  
Savoir utiliser le Théorème des gendarmes pour déterminer la limite d'une suite  $(u_n)_n$ .
- Croissances comparées entre  $\ln(n)^a$ ,  $n^b$  ( $b > 0$ ),  $e^n |c^n$ ,  $n!$ .
- Si les sous-suites  $(u_{2n})_{n \geq n_0}$  et  $(u_{2n+1})_{n \geq n_0}$  convergent et ont la même limite, alors  $(u_n)_{n \geq n_0}$  converge.

## ■ Séries numériques ■

- Définition d'une série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ . Somme partielle  $S_n$ . Nature (convergente/divergente), somme  $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ .
- Série absolument convergente.

- Connaître les propriétés des séries convergentes : Le terme général  $u_n$  tend vers 0, le reste tend vers 0, somme et multiples de séries CV.
- Savoir prouver correctement la convergence d'une série : Critère de convergence des séries à termes positifs. Une série absolument convergente est convergente.
- Connaître les exemples de référence (déf, nature, somme) : Série géométrique  $\sum_{n \geq 0} q^n$ , Série géométrique dérivée  $\sum_{n \geq 0} nq^{n-1}$ , Série géométrique dérivée seconde  $\sum_{n \geq 0} n(n-1)q^{n-2}$ , série télescopique  $\sum_{n \geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$ , série exponentielle  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ .
- Savoir utiliser les exemples de référence pour montrer qu'une série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  est convergente ou divergente (comparaison).  
Savoir déterminer la somme d'une série à partir des séries de référence.

## ■ Suites et séries 2 ■

- $(u_n)_{n \geq 0}$  est négligeable devant  $(v_n)_{n \geq 0}$  si  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ . On le note  $u_n = o(v_n)$ .  
 $(u_n)_{n \geq 0}$  est équivalente à  $(v_n)_{n \geq 0}$  si  $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$ . On le note  $u_n \sim v_n$ .
- La relation  $u_n = o(v_n)$  n'est pas symétrique. Pour  $u_n = o(n^2)$  on a  $u_n = o(n^4)$ , mais si  $v_n = o(n^4)$  rien n'assure que  $v_n = o(n^2)$ .
- Règles de calculs des  $o$  :  $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$ ,  $o(v_n)o(w_n) = o(v_n w_n)$ ,  $o(v_n) = v_n o(1)$ ,  $o(\lambda v_n) = o(v_n)$  (pour  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ),  $o(o(v_n)) = o(v_n)$ .
- Règles de calcul pour des équivalents : Si  $u_n \sim v_n$  on a  $v_n \sim u_n$ , et  $u_n^a \sim v_n^a$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Si  $u_n \sim v_n$  et  $u'_n \sim v'_n$  on a  $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ .  
Contre-ex :  $n^2 + 1 \sim n^2 + n$ ,  $-n^2 + 1 \sim -n^2 + n$ , mais  $(n^2 + 1) + (-n^2 + 1) \not\sim (n^2 + n) + (-n^2 + n)$ .  
Rem : Les notations  $u_n = o(0)$  et  $u_n \sim 0$  n'ont pas de sens.
- On a  $u_n = o(1)$  ssi  $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ . La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est CV, de limite  $\lambda$ , ssi  $u_n = \lambda + o(1)$ .  
Pour  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , on a  $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \lambda$  ssi  $u_n \sim \lambda$ . (Faux pour  $\lambda = 0$ )  
Savoir calculer un équivalent d'une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  pour déterminer son comportement (convergence, divergence). Savoir utiliser les  $o$  pour montrer la convergence d'une suite (en général vers 0).
- Connaître les croissances comparées pour les suites.
- Définition du point fixe pour une fonction  $f$  ( $f(l) = l$ ).
- Suites récurrentes construites via " $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ ".  
Définition d'un ensemble  $F$  stable pour une fonction  $f$ . Si  $u_0 \in F$ , alors la suite

- $(u_n)_{n \geq 0}$  existe. Si la limite  $l$  existe dans  $D_f$ , c'est un point fixe de  $f$  ( $f(l) = l$ ). Si  $f$  est croissante sur  $F$ , la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est monotone (dépend du signe de  $f(u_0) - u_0$ ).
- Utiliser l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF) pour encadrer  $|f(x) - f(y)|$ , à appliquer pour  $u_n$  et  $l$ , dans le cas où  $f'$  ne prend que de petites valeurs ( $|f'| \leq k < 1$ ).
  - Suites implicites définies par la relation  $f_n(u_n) = 0$ .  
L'existence vient de l'étude des fonctions  $f_n$ .  
La monotonie de la suite  $(u_n)_n$  s'étudie via le signe de  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ .
  - Suites implicites définies par la relation  $f(u_n) = n$ .  
L'existence vient de l'étude de la fonction  $f$ .  
La monotonie et la limite de la suite  $(u_n)_n$  s'étudient via le tableau de variations de  $f$ .
  - Définition d'une série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ . Somme partielle  $S_n$ . Nature (convergente/divergente), somme  $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ . Série absolument convergente.
  - Connaître les propriétés des séries convergentes : Le terme général  $u_n$  tend vers 0, somme et multiples de séries CV.
  - Savoir prouver correctement la convergence d'une série : Critère de convergence des séries à termes positifs. Propriété des séries absolument convergentes. Encadrement de séries à termes positifs. Séries à termes généraux équivalents. Terme général négligeable devant un autre. Méthode des croissances comparées.
  - Connaître les exemples de référence (déf, nature, somme) : Série géométrique  $\sum_{n \geq 0} q^n$ , série télescopique  $\sum_{n \geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$ , série harmonique  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ , séries géométriques dérivées  $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ , série exponentielle  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ .
  - Savoir utiliser les exemples de référence pour montrer qu'une série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  est convergente ou divergente (comparaison, équivalent).  
Savoir déterminer la somme d'une série à partir des séries de référence.
  - Savoir effectuer un calcul de somme de série dans un cas simple ou classique.

#### Questions de cours :

1. Théorème de convergence monotone. Théorème de comparaison (cas convergent et cas divergent).  
Théorème des gendarmes. Suites adjacentes (définition et propriété).
2. Propriété : Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :  $u_0 \in I$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $u_{n+1} = f(u_n)$ , et  $f$  est continue sur  $I$ .  
Si  $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} l$  avec  $l \in I$ , alors on a  $f(l) = l$ .  
Enoncé et preuve de cette propriété.
3. Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}, (w_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$  des suites réelles, avec  $(v_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$  qui sont non-nulles à partir d'un certain rang. Définition de  $u_n = o(v_n)$ . Propriétés opératoires de  $o$  pour les suites :
  - Si  $u_n = o(v_n)$  et  $w_n = o(v_n)$ , alors  $u_n + w_n = o(v_n)$ . (Addition de  $o$ )
  - Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $u_n w_n = o(v_n w_n)$ . (Multiplication de  $o$ )
  - En particulier, si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $u_n = v_n \cdot o(1)$ .
  - Si  $u_n = o(v_n)$  et  $v_n = o(t_n)$  alors  $u_n = o(t_n)$ .
 Preuve de la somme de  $o$ .
4. Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}, (w_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$  des suites réelles, avec  $(v_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$  qui sont non-nulles à partir d'un certain rang. Définition de  $u_n \sim v_n$ .  
Propriétés de  $\sim$  pour les suites :
  - Si  $u_n \sim v_n$  et  $w_n \sim t_n$ , alors  $u_n w_n \sim v_n t_n$ .
  - Si  $u_n \sim v_n$ , alors  $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$ .
  - Si  $u_n \sim v_n$  et si  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont positives, alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ .
 Equivalents usuels : Si  $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ ,  $\exp(u_n) - 1 \sim u_n$ ,  $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ .
5. Théorème sur la convergence de séries à termes positifs. Théorème pour les séries à termes positifs à termes généraux équivalents. Théorème pour les SATP avec un terme général négligeable par rapport à l'autre. Théorème de comparaison pour les SATP.
6. Séries télescopiques (définition, somme partielle, convergence, somme). Séries géométriques (définition, somme partielle, convergence, somme). Séries exponentielles (définition, convergence).  
Preuve de la convergence des séries exponentielles.