

Chapitre 2

Espaces vectoriels

Table des matières

1	Espaces vectoriels	1
1.1	Définitions - Exemples	1
1.2	Exemples fondamentaux	1
2	Sous-espaces vectoriels	3
3	Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré	5
4	Familles libres, familles génératrices, bases	6
4.1	Familles libres	6
4.2	Familles génératrices	7
4.3	Bases	8
4.4	Bases canoniques	8
4.5	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base	9
5	Dimension d'un espace vectoriel	10
5.1	Dimension et bases	10
5.2	Sous-espaces vectoriels et dimension	11
5.3	Extraire et compléter une base	12
6	Rang d'une famille de vecteurs	13
6.1	Calcul du rang	13
6.2	Quand une famille dépend d'un paramètre	14
7	Changements de coordonnées	16
	Bilan du chapitre	18

1 Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, nous aborderons les espaces vectoriels réels, de dimension finie. En première année, vous avez déjà travaillé dans $\mathbb{R}^n$. La notion d'espace vectoriel permet de retrouver les mêmes opérations sur d'autres ensembles d'objets, comme les matrices ou les polynômes.

1.1 Définitions

DÉFINITION 1 (Espace vectoriel réel)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E un ensemble muni :

1. D'une addition $+$, qui à deux éléments $u, v \in E$ associe un élément $u + v \in E$.
2. D'une multiplication externe $.$, appelée **multiplication par un scalaire**, qui à un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ et un élément $u \in E$ associe un élément $\lambda.u \in E$.

Dans le cadre du programme, on dit que $(E, +, .)$ est un **espace vectoriel réel de dimension n** s'il existe une bijection $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ (chaque élément de $\mathbb{R}^n$ a un unique antécédent dans E) telle que :

$$\forall u, v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v), \\ \varphi(\lambda.u) = \lambda\varphi(u). \end{cases}$$

Les opérations à droite sont celles de $\mathbb{R}^n$.

Les éléments de E s'appellent des **vecteurs**, les éléments de $\mathbb{R}$ s'appellent des **scalaires**. L'unique élément de E envoyé par φ sur $(0, \dots, 0)$ est appelé **vecteur nul**, et est noté 0_E ou 0 .

Il vérifie, pour tout $u \in E$, $u + 0_E = u$.

REMARQUE 2 — Un espace vectoriel est noté $(E, +, .)$, mais on le notera souvent E , la notation des opérations $+$ et $.$ étant implicite car sans ambiguïté.

Le plus souvent, on omettra le point dans la multiplication par un scalaire : $2.u = 2u$.

L'ensemble $\{0_E\}$, muni des opérations $0_E + 0_E = 0_E$ et $\lambda.0_E = 0_E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, est aussi un espace vectoriel réel. Sa dimension est, par convention, égale à 0.

Cette définition revient à dire que l'on peut représenter chaque vecteur d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie E par un unique n -uplet de réels, et que cette représentation respecte l'addition et la multiplication par un scalaire.

Les éléments de E ne sont pas des n -uplets, mais ils se manipulent comme des n -uplets.

PROPOSITION 3

Soit E un espace vectoriel réel. Pour tous $u, v, w \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u + v &= v + u, & u + (v + w) &= (u + v) + w, \\ \lambda(u + v) &= \lambda u + \lambda v, & (\lambda + \mu)u &= \lambda u + \mu u, & \lambda(\mu u) &= (\lambda\mu)u. \end{aligned}$$

De plus, $1.u = u$, $0.u = 0_E$ et $\lambda.0_E = 0_E$. Le vecteur $(-1).u$ est appelé **opposé** de u , noté $-u$; on a $u + (-u) = 0_E$. On note $u - v = u + (-v)$.

1.2 Exemples fondamentaux

EXEMPLE 4 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n -uplets de nombres réels :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \text{ t.q. } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

On peut aussi écrire un élément de $\mathbb{R}^n$ sous forme de matrice colonne.

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel réel. Ses opérations sont :

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda.(x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \end{aligned}$$

pour tous $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Son vecteur nul est $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \dots, 0)$.

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sont les exemples fondamentaux d'espaces vectoriels. Pour de petites valeurs de n , vous retrouvez $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ (la droite réelle, le plan, l'espace).

DÉFINITION 5 (Espace vectoriel de matrices)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont réels.

Pour $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}, \quad \lambda.A = (\lambda a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}.$$

Si $p = n$, on note aussi cet espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (cas des matrices carrées)

PROPOSITION 6

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.

Son vecteur nul est la matrice nulle $0_{n,p}$ (celle dont tous les coefficients sont nuls).

Sa dimension comme espace vectoriel est $n \times p$.

EXEMPLE 7 — Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

On reconnaît ici les opérations déjà définies sur les matrices.

REMARQUE 8 (Rappel sur les matrices inversibles) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice identité I_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients valent 0.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = BA = I_n$.

Cette matrice B est alors unique : on la note A^{-1} et on l'appelle l'inverse de A .

De plus, A est inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$ **ou** $AB = I_n$.

REMARQUE 9 (Transposée et matrices symétriques) — Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La transposée de A , notée tA , est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (j, i) vaut $a_{i,j}$.

Si $p = n$, on dit que A est **symétrique** lorsque ${}^tA = A$, c'est-à-dire lorsque $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

DÉFINITION 10 (Espace vectoriel de polynômes)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n :

$$\mathbb{R}_n[X] = \{a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \text{ t.q. } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Ici, X est l'indéterminée du polynôme.

Si le polynôme n'est pas nul, son degré est le plus grand indice k pour lequel $a_k \neq 0$.

Le polynôme nul, lui, est par convention de degré $-\infty$.

Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les opérations :

$$P + Q = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k, \quad \lambda.P = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k.$$

Alors, $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel réel de dimension $n + 1$.

Son vecteur nul est le polynôme nul, celui dont tous les coefficients sont nuls.

EXEMPLE 11 — Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $P = 1 + X$ et $Q = X^2 - X$.

On a $2P - Q = 2 + 2X - X^2 + X = 2 + 3X - X^2$.

Les polynômes 1, X et le polynôme nul appartiennent à $\mathbb{R}_2[X]$, même s'ils ne sont pas de degré 2. L'ensemble des polynômes réels de degré exactement 2 n'est pas un espace vectoriel, car une somme de polynômes de degré 2 n'est pas forcément de degré 2. Par exemple, $(X^2 + 2X) + (-X^2) = 2X$.

REMARQUE 12 — Deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont égaux ssi ils ont les mêmes coefficients.

Deux matrices sont égales ssi elles ont les mêmes coefficients.

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.

De la même manière, **un vecteur (resp. matrice, resp. polynôme) est nul ssi tous ses coefficients sont nuls.**

Pour les matrices et les polynômes, les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire sont celles que l'on connaît déjà.

La multiplication de deux matrices (de tailles comparables) ou de deux polynômes n'intervient pas dans la définition d'un espace vectoriel. Elle ne sera donc que très peu abordée dans ce chapitre.

2 Sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 13

Soit E un espace vectoriel réel et soit F une partie de E (un sous-ensemble de E).

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si $F \neq \emptyset$ et si

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v \in F, \quad \lambda.u + \mu.v \in F.$$

Les opérations utilisées sur les éléments de F sont celles de E .

REMARQUE 14 — Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors le vecteur nul 0_E appartient à F .

Les ensembles $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E , respectivement les plus petit et plus grand sous-espaces vectoriels possibles.

PROPOSITION 15

Soit E un espace vectoriel réel. Si F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$, alors $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour montrer qu'un ensemble $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, on montrera le plus souvent que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ plus grand et que l'on connaît déjà. ($\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}_n[X]$).

MÉTHODE 16

Soit E un espace vectoriel réel et soit $F \subset E$.

Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

1. $0_E \in F$ (F contient le vecteur nul de E , donc est **non-vide**) ;
2. F est **stable par addition** : pour tous $u, v \in F$, on a $u + v \in F$;
3. F est **stable par multiplication par un scalaire** : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in F$, on a $\lambda u \in F$.

Alternative : On peut aussi vérifier les deux dernières conditions en une seule fois : pour tous $u, v \in F$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda u + \mu v \in F$.

Cela fait gagner du temps.

EXEMPLE 17 — On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x - 2y + z = 0\}$. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a bien $F \subset \mathbb{R}^3$. Le vecteur nul $(0, 0, 0)$ appartient à F , car $0 - 2 \times 0 + 0 = 0$.

Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de F , et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$(\lambda x + \mu x') - 2(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = \lambda \underbrace{(x - 2y + z)}_{=0} + \mu \underbrace{(x' - 2y' + z')}_{=0} = 0.$$

Donc $\lambda u + \mu v \in F$. On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et donc un espace vectoriel réel.

EXEMPLE 18 — Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ t.q. } P(1) = 0\}$. Montrons que G est un espace vectoriel. On sait que $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel et on a $G \subset \mathbb{R}_2[X]$. Le polynôme nul appartient à G . Soient $P, Q \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Le polynôme $\lambda P + \mu Q$ appartient à $\mathbb{R}_2[X]$ et :

$$(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0.$$

Ainsi, $\lambda P + \mu Q \in G$. Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

REMARQUE 19 — Pour montrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel, il suffit qu'une des conditions précédentes ne soit pas vérifiée. On commence souvent par regarder si le vecteur nul appartient à l'ensemble.

EXEMPLE 20 — L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x + y = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, car $(0, 0)$ n'y appartient pas.

De même, l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car la matrice nulle n'est pas inversible.

PROPOSITION 21

Soit E un espace vectoriel réel et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

REMARQUE 22 — **Attention !** Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , en général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Contre-exemple : $F = \{(x, 0) \text{ t.q. } x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \text{ t.q. } y \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. Mais $F \cup G$ n'est pas stable par addition. En effet, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ appartiennent à $F \cup G$, alors que $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F \cup G$.

EXEMPLE 23 — L'ensemble $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y = x^2\}$ contient le vecteur nul, puisque $0 = 0^2$. Cela ne suffit pourtant pas pour en faire un sous-espace vectoriel. En effet, le vecteur $u = (1, 1)$ appartient à H , mais $2u = (2, 2)$ n'y appartient pas : sa deuxième coordonnée est 2, alors que le carré de sa première coordonnée vaut 4. L'ensemble H n'est donc pas stable par multiplication par un scalaire et n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

On aurait aussi pu constater que $u + u \notin H$. Il suffit de trouver un contre-exemple pour conclure.

EXEMPLE 24 — Considérons les deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x - y = 0\}.$$

La proposition précédente assure que $F \cap G$ est un sous-espace. Cherchons maintenant à décrire ses éléments. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$(x, y, z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ z = -2x. \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, x, -2x)$$

Ainsi, on obtient :

$$F \cap G = \{(t, t, -2t) \text{ t.q. } t \in \mathbb{R}\}.$$

Cette égalité contient deux informations : tout élément de l'intersection a cette forme, et tout triplet de cette forme satisfait bien les deux équations. Par exemple, $(3, 3, -6)$ appartient à l'intersection. En revanche, $(1, 1, -1)$ appartient à G mais pas à F , car $1 + 1 - 1 \neq 0$; il n'appartient donc pas à $F \cap G$.

3 Combinaisons linéaires, sous-espace vectoriel engendré

DÉFINITION 25 (Combinaison linéaire)

Soit E un espace vectoriel réel, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $u, u_1, \dots, u_p \in E$. On dit que le vecteur u est une **combinaison linéaire** de $u_1, \dots, u_p$ s'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p.$$

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les coefficients de cette combinaison linéaire.

EXEMPLE 26 — Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $e_1 = (0, 1, 2)$ et $e_2 = (0, 2, 3)$. Le vecteur $(0, 0, 1)$ est une combinaison linéaire de e_1 et e_2 . En effet, on a $2e_1 - e_2 = (0, 0, 1)$.

DÉFINITION 27 (Sous-espace vectoriel engendré)

Soit E un espace vectoriel réel, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $u_1, \dots, u_p \in E$.

On définit le **sous-espace vectoriel engendré par la famille** $(u_1, \dots, u_p)$ comme l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $u_1, \dots, u_p$:

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}.$$

Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E .

PROPOSITION 28

Soit E un espace vectoriel réel, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $u_1, \dots, u_p \in E$.

Alors, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs $u_1, \dots, u_p$. Autrement dit, si un sous-espace vectoriel F de E contient chacun des vecteurs $u_1, \dots, u_p$, alors il contient aussi toutes leurs combinaisons linéaires. C'est-à-dire $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \subset F$.

EXEMPLE 29 — Dans $\mathbb{R}^3$, posons $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $F = \text{Vect}(u, v)$. Le vecteur $a = (2, 1, 3)$ appartient à F , car $a = 2u + v$. Montrons en revanche que $b = (1, 1, 0)$ n'appartient pas à F . Supposons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.q. $b = \lambda u + \mu v$. L'égalité des trois coordonnées donne

$$\begin{cases} \lambda = 1, \\ \mu = 1, \\ \lambda + \mu = 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations imposent $\lambda + \mu = 2$, en contradiction avec la troisième. On a donc $b \notin F$. De façon générale, on a $\lambda u + \mu v = (\lambda, \mu, \lambda + \mu)$: les vecteurs de F sont exactement ceux dont la troisième coordonnée est la somme des deux premières.

On a en réalité : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = x + y\}$.

EXEMPLE 30 — Pour $e_1 = (0, 1, 2)$, $e_2 = (0, 2, 3)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$, montrons que $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(j, k)$.

On a $k = 2e_1 - e_2$ et $j = -3e_1 + 2e_2$, donc $\text{Vect}(j, k) \subset \text{Vect}(e_1, e_2)$.

Et réciproquement, on a $e_1 = j + 2k$ et $e_2 = 2j + 3k$, donc $\text{Vect}(e_1, e_2) \subset \text{Vect}(j, k)$.

Cela montre l'égalité par double inclusion.

EXEMPLE 31 — Soit $F = \{(2x - y, x + 2y, 3x - 2y) \text{ t.q. } x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Alors, F est un sous-espace vectoriel car :

$$\begin{aligned} F &= \{x(2, 1, 3) + y(-1, 2, -2) \text{ t.q. } x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((2, 1, 3), (-1, 2, -2)). \end{aligned}$$

On retrouve une écriture sous la forme d'un espace engendré en regroupant les termes qui dépendent de x , puis ceux qui dépendent de y .

EXEMPLE 32 — On pose $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ t.q. } P(1) = 0\}$. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. On a $P(1) = 0$ ssi $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ ssi $a_0 = -a_1 - a_2$ ssi

$$P = -a_1 - a_2 + a_1X + a_2X^2 = a_1(X - 1) + a_2(X^2 - 1).$$

Ainsi, tout polynôme de G est une combinaison linéaire de $X - 1$ et de $X^2 - 1$. On en déduit que $G = \text{Vect}(X - 1, X^2 - 1)$.

4 Familles libres, familles génératrices, bases

Une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est une liste ordonnée de vecteurs. Les vecteurs qui la composent ne sont pas nécessairement distincts.

4.1 Familles libres

DÉFINITION 33

Soit E un espace vectoriel réel, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

1. La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est dite **libre** si, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont **linéairement indépendants**.

2. Si la famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**. Cela signifie qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, non tous nuls, tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E$.

Une telle égalité est appelée **relation de liaison**.

Pour montrer qu'une famille est libre, on part donc d'une combinaison linéaire nulle et on cherche à montrer que tous ses coefficients sont nuls : Il s'agit de résoudre une équation vectorielle dont les inconnues sont des scalaires. Pour montrer qu'une famille est liée, il suffit de trouver une relation de liaison (c'est-à-dire un contre-exemple).

EXEMPLE 34 — Pour $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, la famille (u_1, u_2, u_3) n'est pas libre.

En effet, on a $u_3 = u_1 + u_2$, donc $u_1 + u_2 - u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Les coefficients 1, 1, -1 ne sont pas tous nuls.

EXEMPLE 35 — Montrons que la famille $(1, X - 1, (X - 1)^2)$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a + b(X - 1) + c(X - 1)^2 = 0$. En développant puis en identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{aligned} a + b(X - 1) + c(X - 1)^2 = 0 &\Leftrightarrow cX^2 + (b - 2c)X + (a - b + c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0, \\ b - 2c = 0, \\ a - b + c = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0, \\ b = 0, \\ a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc cette famille est libre.

DÉFINITION 36 (Vecteurs colinéaires)

Soit E un espace vectoriel réel et soient $u, v \in E$. On dit que u et v sont **colinéaires** si l'un est un multiple de l'autre : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$. En particulier, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de E .

PROPOSITION 37

Soit E un espace vectoriel réel et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E , avec $p \in \mathbb{N}^*$.

- Si $p = 1$, la famille (u_1) est libre si et seulement si $u_1 \neq 0_E$.
- Si $p = 2$, la famille (u_1, u_2) est libre si et seulement si ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
- Si l'un des vecteurs est nul, ou si deux vecteurs de la famille sont égaux, alors la famille est liée.
- Toute famille obtenue en retirant des vecteurs à une famille libre est libre.

REMARQUE 38 — **Attention !** Trois vecteurs deux à deux non colinéaires ne forment pas nécessairement une famille libre. Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$ sont deux à deux non colinéaires, mais leur famille est liée puisque $(1, 0) + (0, 1) - (1, 1) = (0, 0)$.

PROPOSITION 39 (Familles liées et sous-espace engendré)

Soit E un espace vectoriel réel, soit $p \geq 2$ un entier et soient $u_1, \dots, u_p \in E$.

La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres.

En particulier, si $u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$, alors

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}).$$

Exemple - Famille échelonnée de polynômes

DÉFINITION 40

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(P_1, \dots, P_p)$ une famille de **polynômes non nuls** de $\mathbb{R}_n[X]$. On dit que cette famille est **échelonnée en degré** si

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_p).$$

PROPOSITION 41

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(P_1, \dots, P_p)$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degré. Alors, cette famille est libre.

EXEMPLE 42 — Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Les familles $(1, X, \dots, X^n)$ et $(1, X - a, \dots, (X - a)^n)$ sont échelonnées en degré. Ce sont donc des familles libres de $\mathbb{R}_n[X]$.

La famille $((X + 1)^2, X^2 + 1, 2X)$ n'est pas libre : on a $(X + 1)^2 - (X^2 + 1) - 2X = 0$.

4.2 Familles génératrices

DÉFINITION 43

Soit E un espace vectoriel réel, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $u_1, \dots, u_p \in E$.

On dit que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est **génératrice de E** si $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = E$.

Dit autrement, la famille est génératrice de E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$: pour tout $u \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p.$$

EXEMPLE 44 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la i -ième qui vaut 1.

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$. En effet, soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors, on a

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

De même, pour $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$: pour tout polynôme P de cet espace il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$.

REMARQUE 45 — Si on rajoute des vecteurs de E à une famille génératrice de E , elle reste génératrice.

Par exemple, $(1, X, X^2, 1 + X)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Le dernier vecteur n'est pas nécessaire pour engendrer l'espace.

4.3 Bases

DÉFINITION 46

Soit E un espace vectoriel réel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $e_1, \dots, e_n \in E$. On dit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une **base de E** si elle est à la fois libre et génératrice de E .

PROPOSITION 47 (Décomposition dans une base)

Soit E un espace vectoriel réel, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $e_1, \dots, e_n \in E$.

La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

DÉFINITION 48 (Coordonnées d'un vecteur dans une base)

Soit E un espace vectoriel réel, soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $u \in E$.

On appelle **coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$** l'unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

On note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, ou $X_{\mathcal{B}}$ lorsque le vecteur u est précisé, la matrice colonne de ses coordonnées :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

REMARQUE 49 — L'existence de ce n -uplet vient du fait que la famille est génératrice. L'unicité de ce n -uplet vient du fait qu'elle est libre.

Attention aux ensembles : u est un vecteur de E , alors que ses coordonnées $x_1, \dots, x_n$ sont des réels.

Il faut aussi faire attention à l'ordre des vecteurs de la base : les coordonnées sont écrites dans le même ordre.

EXEMPLE 50 — Soient $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$ dans $\mathbb{R}^2$. La famille $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'égalité $(x, y) = au + bv$ équivaut à

$$\begin{cases} a + b = x, \\ a - b = y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y}{2}, \\ b = \frac{x-y}{2}. \end{cases}$$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'écrit donc d'une unique façon comme combinaison linéaire de u et v .

Pour $(x, y) = (3, 1)$, on obtient $a = 2$ et $b = 1$. Ainsi, on a $(3, 1) = 2u + v$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}((3, 1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.4 Bases canoniques

DÉFINITION 51 (Base canonique de $\mathbb{R}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la i -ième composante vaut 1 et dont toutes les autres composantes sont nulles.

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLE 52 — Dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, les coordonnées de $u = (2, 3, 1)$ sont $(2, 3, 1)$. Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

REMARQUE 53 — Pour $u = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

DÉFINITION 54 (**Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$**)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont le coefficient en position (i, j) vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

La famille de ces np matrices est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, appelée **base canonique**. Dans ce cours, on les range dans l'ordre

$$(E_{1,1}, \dots, E_{1,p}, E_{2,1}, \dots, E_{2,p}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{n,p}).$$

EXEMPLE 55 — Dans la base canonique $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a, pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{2,1} + dE_{2,2}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

REMARQUE 56 — Pour $M = (m_{i,j})_{i,j}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{i,j} E_{i,j}$.

DÉFINITION 57 (**Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$**)

Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, appelée **base canonique**.

Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$, ses coordonnées dans cette base sont $(a_0, \dots, a_n)$, dans l'ordre des puissances croissantes de X .

EXEMPLE 58 — Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de $P = 2 - 3X + X^2$ sont $(2, -3, 1)$. Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

REMARQUE 59 — Pour $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on a $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$.

4.5 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

DÉFINITION 60

Soit E un espace vectoriel réel, soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E .

Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, soit $u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ la décomposition du vecteur u_j dans la base $\mathcal{B}$, avec $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

On définit alors la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

Cette matrice est appelée **matrice de la famille** $(u_1, \dots, u_p)$ **dans la base $\mathcal{B}$** . Sa j -ième colonne contient les coordonnées de u_j dans $\mathcal{B}$.

EXEMPLE 61 — Pour $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1, -1), (0, 1))$ et $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (1, 1)$, $u_3 = (2, 1)$, on a :

$$u_1 = 1(1, -1) + 1(0, 1), \quad u_2 = 1(1, -1) + 2(0, 1), \quad u_3 = 2(1, -1) + 3(0, 1).$$

Donc, la matrice de cette famille dans $\mathcal{B}$ est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5 Dimension d'un espace vectoriel

5.1 Dimension et bases

THÉORÈME 62

Soit E un espace vectoriel réel non réduit à $\{0_E\}$. Dans le cadre de dimension finie considéré ici, E possède une base et toutes ses bases ont le même nombre de vecteurs.

DÉFINITION 63 (Dimension)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, avec $E \neq \{0_E\}$.

On appelle **dimension de** E , notée $\dim(E)$, le nombre de vecteurs d'une base de E . Ce nombre ne dépend pas de la base choisie.

Par convention, $\dim(\{0_E\}) = 0$. La famille vide, c'est-à-dire la famille qui ne contient aucun vecteur, est considérée comme une base de $\{0_E\}$.

La dimension compte donc les vecteurs d'une base, et non les vecteurs de l'espace tout entier. Elle est aussi le nombre de coordonnées nécessaires pour écrire un vecteur dans cette base. On retrouve le nombre n utilisé dans la définition d'un espace vectoriel de dimension n .

PROPOSITION 64

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. On a :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n, \quad \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np, \quad \dim(\mathbb{R}_m[X]) = m + 1.$$

EXEMPLE 65 — La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$. Elle contient trois vecteurs, donc $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.

La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. Elle contient quatre matrices, donc $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$. Ici, les matrices sont les vecteurs de l'espace que l'on étudie.

PROPOSITION 66

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E , avec $p \in \mathbb{N}^*$.

- Si la famille est libre, alors $p \leq n$.
- Si la famille est génératrice de E , alors $p \geq n$.

Ainsi, une famille de plus de n vecteurs est nécessairement liée, et une famille de moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice de E .

PROPOSITION 67 (Caractérisation des bases)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n **vecteurs** de E . On a :

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E &\Leftrightarrow (u_1, \dots, u_n) \text{ est libre} \\ &\Leftrightarrow (u_1, \dots, u_n) \text{ est génératrice de } E. \end{aligned}$$

Ce résultat simplifie la recherche de bases. Lorsque l'on connaît la dimension de l'espace, on commence par compter les vecteurs de la famille. S'il y en a autant que la dimension, il suffit de montrer que la famille est libre, ou de montrer qu'elle est génératrice de E , pour en déduire que c'est une base de E .

EXEMPLE 68 — Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\mathcal{B} = (2, 3X - 1, (X + 2)^2)$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Les trois polynômes sont non nuls et leurs degrés sont respectivement 0, 1 et 2. La famille est donc échelonnée en degré, et elle est libre.

Or, $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, et la famille possède exactement 3 vecteurs. Une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 est une base. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

EXEMPLE 69 — Définissons les vecteurs $f_1 = (1, 0, 2)$, $f_2 = (1, 1, 2)$ et $f_3 = (2, 0, 2)$. Montrons que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ en montrant qu'elle est génératrice.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On calcule :

$$f_3 - f_1 = (1, 0, 0) = e_1, \quad f_2 - f_1 = (0, 1, 0) = e_2, \quad f_1 - \frac{1}{2}f_3 = (0, 0, 1) = e_3.$$

Ainsi, les trois vecteurs de la base canonique appartiennent à $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ étant une combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3 , on obtient $\mathbb{R}^3 \subset \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. L'inclusion réciproque vient du fait que $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}^3$. Donc $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}^3$.

La famille est génératrice et possède 3 vecteurs dans un espace de dimension 3. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

5.2 Sous-espaces vectoriels et dimension

PROPOSITION 70

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors :

1. F est de dimension finie, et on a $\dim(F) \leq \dim(E)$.
2. On a $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.
3. On a $\dim(F) = 0$ si et seulement si $F = \{0_E\}$.

DÉFINITION 71

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit F un sous-espace vectoriel de E .

Si $\dim(F) = 1$, on dit que F est une **droite vectorielle**. Si $\dim(F) = 2$, on dit que F est un **plan vectoriel**. Si $\dim(F) = n - 1$, on dit que F est un **hyperplan** de E .

PROPOSITION 72 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$)

Les sous-espaces vectoriels du plan $\mathbb{R}^2$ sont exactement $\{(0, 0)\}$, les droites vectorielles $\text{Vect}(u)$ avec $u \in \mathbb{R}^2$ non nul, et le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier. Leurs dimensions sont respectivement 0, 1 et 2.

REMARQUE 73 — Une droite vectorielle passe nécessairement par l'origine. Par exemple, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y = 2x\} = \text{Vect}((1, 2))$ est un sous-espace de dimension 1. En revanche, la droite d'équation $y = 2x + 1$ ne contient pas $(0, 0)$: ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

Pour calculer la dimension d'un sous-espace, on peut en déterminer une base, puis compter ses vecteurs. On cherche une famille génératrice et on vérifie qu'elle est libre.

EXEMPLE 74 — Dans $E = \mathbb{R}^4$, on pose $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$. Déterminons une base de F et sa dimension.

Soit $(x, y, z, t) \in F$. On a $y = -x$ et $t = -z$ si et seulement si :

$$(x, y, z, t) = (x, -x, z, -z) = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, -1).$$

Ainsi, en posant $f_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $f_2 = (0, 0, 1, -1)$, on obtient $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Montrons que (f_1, f_2) est libre. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Cette égalité s'écrit $(a, -a, b, -b) = (0, 0, 0, 0)$, donc $a = b = 0$.

La famille (f_1, f_2) est libre et génératrice de F . C'est donc une base de F , et $\dim(F) = 2$.

EXEMPLE 75 — Soit $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Une matrice est symétrique lorsque ses coefficients sont égaux de part et d'autre de la diagonale : elle s'écrit ici $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
On a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_3}.$$

Toute matrice de $\mathcal{S}_2$ est donc une combinaison linéaire de A_1, A_2, A_3 . Réciproquement, toutes ces combinaisons sont symétriques. Ainsi, $\mathcal{S}_2 = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3)$; c'est un sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Et, on a $aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0_{2,2}$ ssi $a = 0, b = 0, c = 0$. Donc (A_1, A_2, A_3) est libre.
Cette famille est donc une base de $\mathcal{S}_2$, et $\dim(\mathcal{S}_2) = 3$.

PROPOSITION 76

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E .
Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

REMARQUE 77 — **Attention !** L'égalité des dimensions ne suffit pas à montrer que deux sous-espaces sont égaux. Il faut aussi montrer une inclusion.

Par exemple, $\text{Vect}((1, 0))$ et $\text{Vect}((0, 1))$ sont deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, donc sont de dimension 1. Elles sont pourtant distinctes : $(1, 0)$ appartient à la première, mais pas à la seconde.

5.3 Extraire et compléter une base

THÉORÈME 78 (Théorème de la base extraite)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille génératrice de E , avec $p \in \mathbb{N}^*$. Alors, on peut extraire une base de cette famille, c'est-à-dire obtenir une base de E en conservant certains de ses vecteurs.

EXEMPLE 79 — La famille $(1, X, 1 + X, X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Le polynôme $1 + X$ est déjà une combinaison linéaire des deux premiers vecteurs. On peut donc le retirer sans changer l'espace engendré.

Il reste la famille $(1, X, X^2)$, qui est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a ainsi extrait une base de la famille de départ.

On a vu que d'une famille génératrice, on peut extraire une base. On étudie maintenant le processus inverse : partir d'une famille libre et lui ajouter des vecteurs pour obtenir une base.

THÉORÈME 80 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E , avec $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Alors, on peut compléter $(u_1, \dots, u_p)$ en une base de E en lui ajoutant $n - p$ vecteurs. De plus, il est possible de choisir les vecteurs ajoutés parmi $e_1, \dots, e_n$.

EXEMPLE 81 — Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $u = (1, 1, 1)$. Comme $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, la famille (u) est libre. Complétons-la en une base.

Essayons d'ajouter e_1 et e_2 . Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $au + be_1 + ce_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On obtient :

$$(a + b, a + c, a) = (0, 0, 0).$$

La troisième composante donne $a = 0$. Les deux premières donnent alors $b = 0$ et $c = 0$. Donc (u, e_1, e_2) est libre.

Il s'agit d'une famille de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, qui est de dimension 3. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

6 Rang d'une famille de vecteurs

DÉFINITION 82

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E . On définit le **rang de la famille** $(u_1, \dots, u_p)$, noté $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$, par :

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)).$$

Le rang d'une famille est donc la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

EXEMPLE 83 — Dans $\mathbb{R}_2[X]$, calculons le rang de $(1, X, 1 + X)$. Comme $1 + X$ est une combinaison linéaire de 1 et de X , on a $\text{Vect}(1, X, 1 + X) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$.

La famille $(1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, donc cet espace est de dimension 2. On en déduit que $\text{rg}(1, X, 1 + X) = 2$.

PROPOSITION 84

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E , avec $p \in \mathbb{N}^*$.

1. On a $0 \leq \text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq \min(n, p)$.
2. On a $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$ si et seulement si la famille est libre.
3. On a $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$ si et seulement si la famille est génératrice de E .
4. Si $p = n$, la famille est une base de E si et seulement si son rang est n .

6.1 Calcul du rang

DÉFINITION 85 (Rang d'une matrice)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_p \in \mathbb{R}^n$ ses colonnes, considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le **rang de la matrice** A , noté $\text{rg}(A)$, est le rang de la famille de ses colonnes :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p).$$

PROPOSITION 86 (Rang et transposition, résultat admis)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La transposée tA , dont le coefficient de ligne j et de colonne i est le coefficient de ligne i et de colonne j de A , appartient à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On a

$$\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A).$$

Le rang d'une matrice est donc aussi le rang de la famille de ses lignes, considérées comme des vecteurs de $\mathbb{R}^p$.

EXEMPLE 87 — Considérons la matrice rectangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ses deux premières colonnes forment la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et sa troisième colonne est leur somme. Ses colonnes engendrent donc $\mathbb{R}^2$, d'où $\text{rg}(A) = 2$. La proposition donne $\text{rg}({}^tA) = 2$, bien que tA possède trois lignes et seulement deux colonnes. Vérifions-le directement :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$, les deux premières coordonnées imposent $a = b = 0$. Les deux colonnes de tA sont donc libres, et leur famille est bien de rang 2.

PROPOSITION 88

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E , avec $p \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)).$$

On peut donc calculer le rang d'une famille de vecteurs en écrivant sa matrice dans une base, puis **en appliquant la méthode du pivot**.

REMARQUE 89 (**Rappel sur la méthode du pivot**) — Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On dit que A est **échelonnée par lignes** si ses lignes nulles sont placées sous ses lignes non nulles et si le premier coefficient non nul de chaque ligne est strictement à droite de celui de la ligne précédente. Ces premiers coefficients non nuls sont appelés les **pivots**.

Les opérations élémentaires sur les lignes sont : échanger deux lignes, multiplier une ligne par un réel non nul, ou ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.

Elles ne changent pas le rang.

Après échelonnement, le rang est égal au nombre de pivots, c'est-à-dire le nombre de lignes non nulles.

EXEMPLE 90 — Dans $\mathbb{R}^3$, on pose

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 1, 2), \quad u_4 = (2, -1, 1).$$

Calculons le rang de cette famille et déterminons une base de l'espace qu'elle engendre.

1. On écrit les vecteurs en colonnes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La première colonne correspond à u_1 , la deuxième à u_2 , et ainsi de suite.

2. On remplace la troisième ligne par $L_3 - L_1 - L_2$. Ses coefficients deviennent $1 - 1 - 0 = 0$, $1 - 0 - 1 = 0$, $2 - 1 - 1 = 0$, $1 - 2 - (-1) = 0$. On obtient :

$$A \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonnée. Elle possède deux lignes non-nulles, donc $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 2$.

3. On a $u_3 = u_1 + u_2$ et $u_4 = 2u_1 - u_2$. Donc $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{Vect}(u_1, u_2)$. De plus, si $au_1 + bu_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $(a, b, a + b) = (0, 0, 0)$, donc $a = b = 0$. La famille (u_1, u_2) est libre. Elle est donc une base de l'espace engendré par les quatre vecteurs.

REMARQUE 91 — Lorsque l'on effectue uniquement des opérations sur les lignes pour échelonner la matrice d'une famille, les positions des colonnes de pivots permettent d'extraire une base : on conserve les vecteurs correspondants dans la **famille initiale**.

Dans l'exemple précédent, les pivots sont dans les colonnes 1 et 2 : on retient donc u_1 et u_2 .

Par contre, les colonnes de la matrice échelonnée ne contiennent généralement plus les coordonnées des vecteurs initiaux.

6.2 Familles dépendant d'un paramètre

EXEMPLE 92 — Pour un réel a , on considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u = (1, 1, 0), \quad v = (1, 0, 1), \quad w_a = (a, 1, 1).$$

Déterminons leur rang suivant la valeur de a . On place les vecteurs en colonnes, puis on effectue des opérations sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Ces deux opérations sont valables pour tout réel a ; aucune division par une expression dépendant de a n'a été effectuée.

- Si $a \neq 2$, les trois coefficients diagonaux sont non nuls. Il y a trois pivots, donc le rang vaut 3. La famille (u, v, w_a) est alors une base de $\mathbb{R}^3$: c'est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3.
- Si $a = 2$, la dernière ligne est nulle, tandis que les deux premières non. Le rang vaut donc 2. On peut vérifier directement que $w_2 = u + v$, ce qui explique la perte de rang. Les deux premières colonnes sont celles des pivots : la famille (u, v) est une base de l'espace engendré.

Dans le second cas, on peut même donner une équation de cet espace. Pour $s, t \in \mathbb{R}$, on a $su + tv = (s + t, s, t)$. Tout vecteur engendré satisfait donc $x = y + z$. Réciproquement, si (x, y, z) vérifie $x = y + z$, alors $(x, y, z) = yu + zv$. Ainsi,

$$\text{Vect}(u, v, w_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x - y - z = 0\}.$$

On a décrit le même sous-espace par une base puis par une équation.

REMARQUE 93 — Un pivot contenant un paramètre ne peut être utilisé comme diviseur qu'après avoir précisé qu'il est non nul. Séparer les cas évite de perdre une valeur du paramètre et, avec elle, une partie de la réponse.

EXEMPLE 94 — Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, considérons les quatre matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous savons que $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$. Pour montrer que (A, B, C, D) est une base, il suffit donc de montrer que cette famille est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

On a $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0$ ssi

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \gamma + \delta \\ \gamma - \delta & \alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En additionnant les deux équations diagonales, on obtient $2\alpha = 0$, puis $\beta = 0$. En additionnant les deux autres équations, on obtient $2\gamma = 0$, puis $\delta = 0$.

La famille (A, B, C, D) est ainsi libre, donc c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculons maintenant les coordonnées d'une matrice quelconque $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans cette base.

L'égalité $T = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ équivaut à

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha - \beta = d, \quad \gamma + \delta = b, \quad \gamma - \delta = c.$$

Par addition puis soustraction des équations, il vient

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \left(\frac{a+d}{2}, \frac{a-d}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{b-c}{2} \right).$$

Par exemple, pour $T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ses coordonnées dans la base (A, B, C, D) sont $(1, 2, 3, 2)$. Le contrôle $A + 2B + 3C + 2D = T$ se fait coefficient par coefficient. Les quatre coefficients de T dans la base canonique et ses quatre coordonnées dans (A, B, C, D) sont deux listes différentes ; elles représentent la même matrice dans deux bases.

7 Changements de coordonnées

PROPOSITION 95 (Bases et matrices inversibles)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{B}$ une base de E et soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E . On pose $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

Alors, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si la matrice M est inversible.

Les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base choisie. On cherche maintenant à passer des coordonnées dans une base aux coordonnées dans une autre base.

DÉFINITION 96 (Matrice de passage)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$, décompose e'_j dans la base $\mathcal{B}$: $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i$, avec $p_{i,j} \in \mathbb{R}$.

On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** la matrice

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Sa j -ième colonne contient les coordonnées du j -ième vecteur de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

On peut aussi noter cette matrice $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

PROPOSITION 97 (Changement de base pour des vecteurs)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible et

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}.$$

Soit $u \in E$. Si $X_{\mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $X_{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ sont les colonnes de coordonnées de u dans ces deux bases, alors

$$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'} \quad \text{et} \quad X_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}^{-1} X_{\mathcal{B}}.$$

REMARQUE 98 — Il faut faire attention au sens dans la formule. La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ contient les vecteurs de $\mathcal{B}'$ écrits dans $\mathcal{B}$. Lorsqu'on la multiplie par les coordonnées d'un vecteur dans $\mathcal{B}'$, on obtient ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

Mnémotechniquement, la relation est $X = PX'$.

EXEMPLE 99 — Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$. La famille $\mathcal{B}$ est la base canonique. La famille $\mathcal{B}'$ est libre, car elle est échelonnée en degré. Elle possède 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 : c'est donc aussi une base.

1. Déterminons $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. On écrit chaque vecteur de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$:

$$1 = 1 + 0X + 0X^2, \quad X-1 = -1 + X + 0X^2, \quad (X-1)^2 = 1 - 2X + X^2.$$

Leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont respectivement $(1, 0, 0)$, $(-1, 1, 0)$ et $(1, -2, 1)$. On place ces coordonnées en colonnes :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour obtenir la matrice inverse, on peut écrire les vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$:

$$1 = 1, \quad X = 1 + (X-1), \quad X^2 = 1 + 2(X-1) + (X-1)^2.$$

On obtient donc

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}.$$

3. Soit $Q = 4X^2 - 3X + 7$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(7, -3, 4)$, car il faut respecter l'ordre $(1, X, X^2)$.

Notons (a, b, c) ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$. La formule $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$ donne :

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 7, \\ b - 2c = -3, \\ c = 4. \end{cases}$$

La dernière équation donne $c = 4$. La deuxième donne $b = -3 + 2 \times 4 = 5$. La première donne alors $a = 7 + b - c = 8$.

Les coordonnées de Q dans $\mathcal{B}'$ sont donc $(8, 5, 4)$. On peut aussi les obtenir par le produit $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} X_{\mathcal{B}}$.

4. Vérifions le résultat en reconstituant le polynôme :

$$8 + 5(X - 1) + 4(X - 1)^2 = 8 + 5X - 5 + 4X^2 - 8X + 4 = 4X^2 - 3X + 7 = Q.$$

On retrouve bien le polynôme de départ.

Bilan du contenu nécessaire à maîtriser :

- Connaître les espaces vectoriels usuels $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_m[X]$, leurs opérations et leurs vecteurs nuls.
Leurs dimensions sont respectivement n , pq et $m+1$.
- Définition d'un sous-espace vectoriel. Pour une partie F d'un espace vectoriel réel E , vérifier que $0_E \in F$, puis que pour tous $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $\lambda u + \mu v \in F$.
- L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E . Ce n'est pas le cas de leur réunion en général.
- Définition d'une combinaison linéaire et de l'espace engendré par une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}.$$
- Savoir montrer qu'un vecteur appartient à un sous-espace engendré en trouvant des coefficients convenables. Pour montrer qu'il n'y appartient pas, établir que le système obtenu n'a aucune solution.
- Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E est libre si l'égalité $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0_E$ implique $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.
Elle est liée s'il existe une telle relation avec au moins un coefficient non nul.
- Une famille de polynômes écheonnée en degré est une famille libre.
- Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Savoir obtenir une famille génératrice à partir d'une écriture paramétrique des vecteurs d'un sous-espace.
- Définition d'une base : famille libre et génératrice.
Chaque vecteur admet alors une unique décomposition dans cette base. Les coefficients, rangés dans l'ordre des vecteurs de la base, sont ses coordonnées.
- Connaître les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}_m[X]$: vecteurs unités, matrices E_{ij} et famille $(1, X, \dots, X^m)$.
- Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie : nombre de vecteurs d'une base.
Si F est un sous-espace de E et $\dim E = n$, alors $\dim F \leq n$, avec égalité si et seulement si $F = E$.
- Dans un espace de dimension n , une famille libre contient au plus n vecteurs et une famille génératrice au moins n vecteurs. Une famille de n vecteurs est une base dès qu'elle est libre ou génératrice.
- Savoir extraire une base d'une famille génératrice et compléter une famille libre en une base. Savoir déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel.
- Définition du rang d'une famille : $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Dans un espace de dimension n , le rang vaut p si et seulement si la famille est libre, et n si et seulement si elle est génératrice.
- Savoir écrire la matrice d'une famille en plaçant les coordonnées des vecteurs en colonnes dans une base fixée, puis calculer son rang par le pivot. Pour toute matrice A , $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A)$.
- Savoir extraire une base de l'espace engendré à l'aide du pivot. Après des opérations sur les lignes, les vecteurs à retenir sont les colonnes correspondantes de la matrice initiale.
- Définition de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$: ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.
Connaître et savoir utiliser $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$.