

FEUILLE DE TD N° 2

Espaces vectoriels■ *Calculs élémentaires*

Exercice 1. On pose $u = (1, -2, 3)$, $v = (0, 1, -1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Calculer $2u - v$ et $u + 3v$. Exprimer le vecteur nul comme combinaison linéaire de u, v . Montrer que la seule combinaison linéaire nulle a ses deux coefficients nuls.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $P = 1 + X$ et $Q = X^2 - X$. Calculer $3P - 2Q$ et ses coordonnées. Le polynôme 1 appartient-il à $\text{Vect}(P, Q)$?

Exercice 3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, écrire $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Calculer les coordonnées de $A + 2I_2$. Pourquoi deux matrices seulement ne peuvent-elles pas former une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 4. Pour $u = (1, 2, 3)$ et $v = (2, 4, 6)$, montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(u)$. Donner le rang de (u, v) et une base de l'espace engendré.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$. Déterminer les coordonnées de $(3, 2)$ puis de (x, y) dans $\mathcal{B}$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, parmi les familles $(1, X)$, $(1, X, X^2)$ et $(1, X, X^2, 1 + X)$, lesquelles sont libres, génératrices de $\mathbb{R}_2[X]$, ou des bases de $\mathbb{R}_2[X]$? Donner la dimension de l'espace engendré par chacune.

Exercice 7. Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 2x - y = 0\}$.

1. Parmi $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(-3, -6)$, lesquels appartiennent à F ?
2. Soient $u = (x, y)$, $v = (x', y') \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Calculer $2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y')$.
3. Conclure que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. On pose $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } y = x^2\}$. Vérifier que le vecteur nul appartient à H . Trouver un vecteur $u \in H$ t.q. $2u \notin H$ et conclure.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $F = \{(x, y, z) \text{ t.q. } x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \text{ t.q. } y = z\}$.

1. Justifier que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de $F \cap G$ et sa dimension.

■ *Premiers réflexes*

Exercice 10. Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse ; lorsqu'une affirmation est fausse, donner un contre-exemple.

1. Toute partie de $\mathbb{R}^3$ qui contient $(0, 0, 0)$ est un sous-espace vectoriel.
2. Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ deux à deux non colinéaires forment une famille libre.
3. Toute famille de quatre polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ est liée.
4. Toute famille libre de trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Deux sous-espaces de même dimension sont égaux.
6. Une famille génératrice de trois vecteurs d'un espace de dimension 3 est une base.

Exercice 11. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace indiqué ?

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$, dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 1\}$, dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$, dans $\mathbb{R}^2$.
4. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = 0\}$, dans $\mathbb{R}_3[X]$.
5. $\{P \in \mathbb{R}_2[X] : \deg(P) = 2\}$, dans $\mathbb{R}_2[X]$.
6. $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : {}^t M = M\}$, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : M^2 = 0\}$, dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

■ *Espaces engendrés et familles libres*

Exercice 12. Déterminer des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ pour écrire les ensembles suivants sous la forme $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On précisera le nombre p de vecteurs utilisés. En déduire que ces ensembles sont des espaces vectoriels.

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0\}$.
2. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0, z + 2t = 0\}$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(5) = 0\}$.

4. $\mathcal{S}_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : {}^t M = M\}$.

Exercice 13. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, 1, 0), \quad v = (1, 0, 1), \quad x = (1, 3, -2), \quad y = (1, 4, -3).$$

1. Montrer que les deux vecteurs u et v engendrent le même sous-espace vectoriel que les deux vecteurs x et y .

Indication : On pourra exprimer x, y en fonction de u, v , puis u, v en fonction de x, y .

2. Les vecteurs $(2, 1, 1)$ et $(1, 1, 1)$ appartiennent-ils à cet espace ?

Exercice 14. Les familles suivantes sont-elles libres ? Lorsqu'une famille est liée, donner une relation de liaison.

1. $((1, 2, 1), (1, 1, 3), (3, -2, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. $((1, 0, 3), (0, 1, 2), (2, -3, 0))$ dans $\mathbb{R}^3$.

■ Bases et coordonnées

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$P_1 = 1 + X + X^2, \quad P_2 = X - 1, \quad P_3 = X + 1.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer les coordonnées de $2X^2 + 5X + 1$ dans $\mathcal{B}$.

Exercice 16. On considère la famille $\mathcal{B} = (1, X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer les coordonnées de $2X^3 - 9X^2 + 12X - 1$ dans $\mathcal{B}$.

3. Plus généralement, soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(1, X - a, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 17. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (I, D, S, T)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Donner les coordonnées de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

3. Appliquer le résultat à $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

■ Dimension et rang

Exercice 18. On considère

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = y + z = z + t = t + x\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En déterminer une base et la dimension.

Exercice 19. On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer N^2 et N^3 .

2. Montrer que E est un sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I_3, N, N^2) en est une base.

3. Donner la dimension de E et les coordonnées de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 20. Dans $\mathbb{R}^4$, on pose

$$u_1 = (1, 1, 0, 1), \quad u_2 = (1, -1, 1, 0), \\ u_3 = (2, 0, 1, 1), \quad u_4 = (0, 2, -1, 1).$$

1. Écrire la matrice de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer son rang par le pivot de Gauss.
2. Extraire une base de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
3. Déterminer tous les $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0$.

Exercice 21. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère

$$P_1 = 1 + X, \quad P_2 = X + X^2, \quad P_3 = 1 - X^2, \quad P_4 = 1 + 2X + X^2.$$

1. Déterminer le rang de (P_1, P_2, P_3, P_4) et extraire une base de son espace engendré F .
2. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(-1) = 0\}$.

Exercice 22. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, 1, 0)$ et $v = (1, 0, 1)$.

1. Montrer que (u, v) est libre.
2. Compléter (u, v) en une base de $\mathbb{R}^3$ en utilisant un vecteur de la base canonique.
3. Déterminer les coordonnées de $(1, 2, 3)$ dans la base obtenue.

■ Changements de coordonnées

Exercice 23. Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{C} = ((1, 2), (0, 1))$.

1. Vérifier que $\mathcal{C}$ est une base, puis déterminer $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ et $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$.
2. Calculer les coordonnées de $u = (3, 1)$ dans $\mathcal{C}$.
3. Un vecteur v a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{C}$. Quelles sont ses coordonnées dans $\mathcal{B}$?

Exercice 24. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{C} = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base.
2. Déterminer $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ et son inverse.
3. Déterminer les coordonnées de $2 - X + 3X^2$ dans $\mathcal{C}$. Vérifier en reconstituant le polynôme.

■ Exercices de synthèse

Exercice 25. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$. Écrire les quatre équations données par l'égalité des coefficients et en déduire que (A, B, C) est libre.
2. Exprimer toute matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ comme combinaison de A, B, C . Conclure que la famille est une base de l'espace des matrices symétriques.
3. Donner les coordonnées de $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette base. Vérifier la décomposition.
4. La famille est-elle une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier avec la dimension, puis avec un exemple de matrice qui n'est pas engendrée.

Exercice 26. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w_a = (1, 1, a)$.

1. Écrire la matrice de (u, v, w_a) dans la base canonique.
2. Effectuer $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2$. Pour quelle valeur de a le dernier pivot disparaît-il?
3. Donner le rang de la famille dans chaque cas. Préciser les valeurs de a pour lesquelles elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Dans le cas de rang 2, écrire une relation de liaison, extraire une base et donner une équation de l'espace engendré.

Exercice 27. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } x + y - z = 0, y + t = 0\}$.

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Choisir y, z comme paramètres libres, exprimer x, t en fonction de ces paramètres puis écrire un vecteur quelconque de F comme combinaison de deux vecteurs u, v .
3. Vérifier que u, v sont libres. En déduire une base et la dimension de F .
4. Le vecteur $(3, -1, 2, 1)$ appartient-il à F ? Si oui, donner ses coordonnées dans la base obtenue.

5. Compléter (u, v) en une base de $\mathbb{R}^4$ en choisissant deux vecteurs parmi ceux de la base canonique. Justifier la liberté de la famille complète.

Exercice 28. On considère $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = P(-1)\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $P = a + bX + cX^2 + dX^3$. Traduire la condition $P \in E$. En déduire une base $\mathcal{B}$ de E et sa dimension.
3. On pose $H = \{P \in E : P'(0) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace de E , puis en déterminer une base et la dimension.
4. Montrer que $\mathcal{C} = (1 + X^2, 1 - X^2, X^3 - X)$ est une base de E . Donner $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$.
5. Déterminer les coordonnées de $2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$ dans $\mathcal{C}$.

Exercice 29. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : MA = AM\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer MA et AM . Caractériser les matrices de E par la forme de leurs coefficients.
3. Déterminer une base de E à l'aide des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis donner $\dim(E)$.
4. Déterminer une base et la dimension du sous-espace de E constitué des matrices symétriques.

Exercice 30. On considère l'ensemble E des suites réelles $w = (w_n)_{n \geq 0}$ de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = a + b2^n, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

L'addition et la multiplication par un réel se font terme à terme.

1. Vérifier que la suite nulle appartient à E et qu'une combinaison linéaire de deux suites de E appartient à E .
2. Pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe une unique suite $w \in E$ telle que $w_0 = s$ et $w_1 = t$. Donner w_n en fonction de s, t et n .
3. Montrer que l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^2, w \mapsto (w_0, w_1)$, est une bijection qui préserve les combinaisons linéaires. En déduire que E est un espace vectoriel de dimension 2.

4. Montrer que les suites $u = (1)_{n \geq 0}$ et $v = (2^n)_{n \geq 0}$ forment une base de E .
5. Montrer que les éléments de E sont exactement les suites vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n.$$

6. Déterminer une base et la dimension du sous-espace des suites de E qui convergent, puis du sous-espace de celles qui tendent vers 0.

Exercice 31 (EDHEC 2019, voie scientifique, exercice 1). *Polynômes d'interpolation. La partie polynomiale du sujet est isolée de la diagonalisation, qui sera étudiée plus tard.*

Soit $p \geq 2$ un entier et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts. Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, on définit

$$L_k = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq k}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}.$$

Préparation : trois valeurs imposées.

- Dans le cas $p = 3$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 1, 2)$, écrire les trois polynômes L_1, L_2, L_3 sous forme factorisée, puis développée.
- Calculer leurs valeurs en 0, 1 et 2. Ranger ces neuf résultats dans un tableau.
- Montrer que $P = L_1 + 3L_2 + 7L_3$ vérifie $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 7$. Existe-t-il un autre polynôme de degré au plus 2 vérifiant ces trois conditions ? Justifier.

Question 4 du sujet : cas général.

- En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.
- Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
- Établir alors que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \quad P = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) L_k.$$

- En déduire que $\sum_{k=1}^p L_k = 1$.

Exercice 32 (Oral ESCP 2009, exercice 2.11 ; *). *L'énoncé est adapté au chapitre, en attendant de voir les applications linéaires.*

Soit $n \geq 2$ un entier. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un réel α tel que

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} = \alpha.$$

Pour $A \in \mathcal{C}$, on note $d(A) = \sum_{k=1}^n a_{1k}$ cette somme commune. On pose $K = \{A \in \mathcal{C} \text{ t.q. } d(A) = 0\}$.

- Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel réel.
- Vérifier que $d(A + B) = d(A) + d(B)$ et $d(\lambda A) = \lambda d(A)$ pour $A, B \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que d peut prendre toute valeur réelle et trouver une matrice non nulle $A \in \mathcal{C}$ telle que $d(A) = 0$.
- (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ = JA = \lambda J$.
(b) Soient $A, B \in \mathcal{C}$. Montrer que $AB \in \mathcal{C}$ et calculer $d(AB)$.
(c) Soit $A \in \mathcal{C}$ inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{C}$ et trouver une relation entre $d(A)$ et $d(A^{-1})$.
- Montrer que chaque matrice $A \in \mathcal{C}$ s'écrit de manière unique $A = B + tJ$, avec $B \in K$ et $t \in \mathbb{R}$. Exprimer t à l'aide de $d(A)$.
- Soit $(r, s) \in \{2, \dots, n\}^2$. On note $A_{r,s}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf

$$a_{11} = a_{rs} = 1, \quad a_{1s} = a_{r1} = -1.$$

Démontrer que la famille $(A_{r,s})_{2 \leq r, s \leq n}$ est une base de K et en déduire la dimension de $\mathcal{C}$.

- Soit $p \geq 1$ un entier et $A \in \mathcal{C}$. Montrer que $B = \frac{d(A)}{n} J$ vérifie

$$A^p - B^p = (A - B)^p.$$