Programme de colle - Colle n° 3

■ *Suites et séries 2* ■

— $(u_n)_{n\geq 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\geq 0}$ si $\frac{u_n}{v_n} \to_{n\to+\infty} 0$. On le note $u_n = o(v_n)$.
$(u_n)_{n\geq 0}$ est équivalente à $(v_n)_{n\geq 0}$ si $\frac{u_n}{v_n} \to_{n\to+\infty} 1$. On le note $u_n \sim v_n$.

— La relation $u_n = o(v_n)$ n'est pas symétrique. Pour $u_n = o(n^2)$ on a $u_n = o(n^4)$, mais si $v_n = o(n^4)$ rien n'assure que $v_n = o(n^2)$.

— : Règles de calculs des o : $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$, $o(v_n)o(w_n) = o(v_n w_n)$, $o(v_n) = v_n o(1)$, $o(\lambda v_n) = o(v_n)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$), $o(o(v_n)) = o(v_n)$.

— Règles de calcul pour des équivalents : Si $u_n \sim v_n$ on a $v_n \sim u_n$, et $u_n^a \sim v_n^a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ on a $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
Contre-ex : $n^2 + 1 \sim n^2 + n$, $-n^2 + 1 \sim -n^2 + n$, mais $(n^2 + 1) + (-n^2 + 1) \not\sim (n^2 + n) + (-n^2 + n)$.
Rem : Les notations $u_n = o(0)$ et $u_n \sim 0$ n'ont pas de sens.

— On a $u_n = o(1)$ ssi $u_n \to_{n\to+\infty} 0$. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et CV, de limite λ, ssi $u_n = \lambda + o(1)$.
Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $u_n \to_{n\to+\infty} \lambda$ ssi $u_n \sim \lambda$. (Faux pour $\lambda = 0$)
Savoir calculer un équivalent d'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ pour déterminer son comportement (convergence, divergence). Savoir utiliser les o pour montrer la convergence d'une suite (en général vers 0).

— Connaître les croissances comparées pour les suites.

— Définition du point fixe pour une fonction f ($f(l) = l$).

— Suites récurrentes construites via "$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$".
Définition d'un ensemble F stable pour une fonction f. Si $u_0 \in F$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ existe. Si la limite l existe dans D_f, c'est un point fixe de f ($f(l) = l$).
Si f est croissante sur F, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone (dépend du signe de $f(u_0) - u_0$).

— Utiliser l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF) pour encadrer $|f(x) - f(y)|$, à appliquer pour u_n et l, dans le cas où f' ne prend que de petites valeurs ($|f'| \leq k < 1$).

— Suites implicites définies par la relation $f_n(u_n) = 0$.
L'existence vient de l'étude des fonctions f_n.
La monotonie de la suite $(u_n)_n$ s'étudie via le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

— Suites implicites définies par la relation $f(u_n) = n$.
L'existence vient de l'étude de la fonction f.
La monotonie et la limite de la suite $(u_n)_n$ s'étudient via le tableau de variations de f.

— Définition d'une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$. Somme partielle S_n. Nature (convergente/divergente), somme $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$. Série absolument convergente.

— Connaître les propriétés des séries convergentes : Le terme général u_n tend vers 0, somme et multiples de séries CV.

— Savoir prouver correctement la convergence d'une série : Critère de convergence des séries à termes positifs. Propriété des séries absolument convergentes. Encadrement de séries à termes positifs. Critère de comparaison série-intégrale. Séries à termes généraux équivalents. Terme général négligeable devant un autre. Méthode des croissances comparées.

— Connaître les exemples de référence (déf, nature, somme) : Série géométrique $\sum_{n\geq 0} q^n$, série télescopique $\sum_{n\geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$, série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, séries géométriques dérivées $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$, séries de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$, série exponentielle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

— Savoir utiliser les exemples de référence pour montrer qu'une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est convergente ou divergente (comparaison, équivalent).
Savoir déterminer la somme d'une série à partir des séries de référence.

— Savoir effectuer un calcul de somme de série dans un cas simple ou classique.

■ *Rappels sur les matrices* ■

— Définition d'une matrice à coefficients réels. Coefficient $m_{i,j}$ d'une matrice M. Ecriture $M = (m_{i,j})_{i,j}$. Ensemble de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ensemble de matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Connaître les matrices particulières : nulle $O_{n,p}$, identité I_n, élémentaires $E_{i,j}$.

— Formes particulières de matrices : triangulaire (supérieure ou inférieure), diagonale, symétrique, antisymétrique, inversible.

— Opérations matricielles : somme, multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$, produit de matrices, puissance de matrices.
Savoir réaliser les opérations matricielles à l'aide des coefficients des matrices. $((A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$, $(\lambda A)_{i,j} = \lambda.A_{i,j}$, $(A.B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j})$.
Savoir représenter au brouillon un produit de matrices correctement, et faire attention aux tailles de matrices.

— Le produit matriciel n'est en général pas commutatif.

— Lorsque A et B commutent, toutes les relations algébriques connues s'appliquent (identités remarquables, formule du binôme pour $(A+B)^n$, $A^n - B^n$).

— Calcul des puissances d'une matrice (par la formule du binôme, ou par récurrence).

— Transposée d'une matrice. Transposée et produit $({}^T(A.B) = B^T.A^T)$

— Matrice carrée inversible. Définition. Une matrice inversible possède un unique inverse, noté M^{-1}. Ensemble $Gl_n(\mathbb{K})$. Proposition : $M \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi il existe $M' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $MM' = I_n$ **ou** $M'M = I_n$.
Un produit de matrices inversibles est inversible. On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

— Cas des matrices $2x2$: Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, M est inversible ssi $\det(M) = ad - bc$ est non-nul. Et, on a $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

— Système linéaire de n équations à p inconnues. Correspondance entre système linéaire (S) et équation matricielle $MX = B$.
Résolution d'un système linéaire échelonné (pas de solutions, une solution, ou une infinité de solutions).
Résolution d'un système linéaire avec la méthode du Pivot sur les lignes.
Savoir reconnaître la forme des solutions d'un système linéaire.

— Matrices échelonnées. Concaténation de deux matrices. Opérations élémentaires sur les lignes.
Méthode du Pivot sur les lignes pour échelonner une matrice M.

— Méthode du Pivot et inverse : Une matrice carrée M est inversible ssi elle s'échelonne en une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous non-nuls.
En échelonnant la matrice $(M|I_n)$ de la forme $(I_n|M')$, on a $M' = M^{-1}$.

■ *Rappels sur les polynômes* ■

— Définition d'un polynôme via les fonctions polynômiales. Coefficients d'un polynôme. Ecriture $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ensemble de polynômes $\mathbb{R}[X]$.

— Somme de polynômes $P + Q$, multiplication par un scalaire $\lambda.P$, produit de polynômes $P \times Q$.
Savoir calculer une somme et un produit de polynômes proprement (réarranger les coefficients selon les puissances de X).

— Degré d'un polynôme, coefficient dominant. Cas particulier du polynôme nul. Degré d'une somme et d'un produit de polynômes. Ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ de polynômes de degré majoré par n. Savoir identifier le degré d'un polynôme.

— Evaluation d'un polynôme P en un nombre x, notée $P(x)$.

— Un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.

— Division euclidienne de polynômes : Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que $P = AQ + R$, $\deg(R) < \deg(Q)$.
Savoir calculer une division euclidienne de polynômes. Liens avec la division euclidienne d'entiers.

— Définition de A divise P. A divise P ssi le reste dans la div. eucl. de A par P est nul.

— a est une racine du polynôme P si $P(a) = 0$. a est une racine ssi $(X - a)$ divise P.
Multiplicité d'une racine a. Polynômes scindés, scindés à racines simples.

— Polynôme dérivé P'. Savoir dériver un polynôme P. Degré de P'.
Caractérisation des racines multiples : a est une racine de P de multiplicité k ssi $P(a) = 0$,$P'(a) = 0$,..., $P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.

— Relations entre coefficients et racines pour les polynômes de degré 2.
(x, y) est solution du système "$x + y = a$ et $xy = b$" ssi x et y sont les racines de $P(X) = X^2 - aX + b$. Savoir résoudre un tel système d'équations.

■ *Rappels sur* $\mathbb{R}^n$ ■

— Combinaison linéaire de vecteurs $(x + \lambda y, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k)$. Savoir identifier et calculer une combinaison linéaire.

— Sous-espace vectoriel $Vect(x_1, \ldots, x_n)$ engendré par une famille de vecteurs.
$Vect(x_1, \ldots, x_n)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de $x_1, \ldots, x_n$. C'est le plus petit sous-ev contenant la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.
Un vecteur x s'écrit comme une combi. lin. de $x_1, \ldots, x_n$ ssi $x \in Vect(x_1, \ldots, x_n)$.

— Familles libres, familles génératrices, bases.
Savoir montrer qu'une famille est libre/génératrice/une base.
Connaître les bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— Une famille est liée ssi l'un de ses vecteurs s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

— Une famille de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ ssi elle est libre ssi elle est génératrice de $\mathbb{R}^n$. Utiliser ce résultat pour déterminer plus rapidement si une famille est une base de $\mathbb{R}^n$ ou non.

— Décomposition des vecteurs dans une base de $\mathbb{R}^n$.
Savoir décomposer un vecteur dans une base $\mathbb{R}^n$, savoir simplifier des combinaisons linéaires.
Savoir montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs via ses coefficients.

■ *Espaces vectoriels* ■

— Connaître les espaces vectoriels usuels $\mathbb{R}^n$, $M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_m[X]$, leurs opérations et leurs vecteurs nuls.
Leurs dimensions sont respectivement n, pq et $m+1$.

— Définition d'un sous-espace vectoriel. Pour une partie F d'un espace vectoriel réel E, vérifier que $0_E \in F$, puis que pour tous $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $\lambda u + \mu v \in F$.

— L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E. Ce n'est pas le cas de leur réunion en général.

— Définition d'une combinaison linéaire et de l'espace engendré par une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E :

$$Vect(u_1, \dots, u_p) = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\}.$$

— Savoir montrer qu'un vecteur appartient à un sous-espace engendré en trouvant des coefficients convenables. Pour montrer qu'il n'y appartient pas, établir que le système obtenu n'a aucune solution.

Questions de cours :

1. Soient $(u_n)_{n\geq n_0}, (v_n)_{n\geq n_0}, (w_n)_{n\geq n_0}, (t_n)_{n\geq n_0}$ des suites réelles, avec $(v_n)_{n\geq n_0}, (t_n)_{n\geq n_0}$ qui sont non-nulles à partir d'un certain rang. Définition de $u_n \sim v_n$.
   Propriétés de $\sim$ pour les suites :
   — Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
   — Si $u_n \sim v_n$, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
   — Si $u_n \sim v_n$ et si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont positives, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.
   Equivalents usuels : Si $u_n \to_{n\to+\infty} 0$, alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$, $\exp(u_n) - 1 \sim u_n$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.
2. Théorème sur la convergence de séries à termes positifs. Théorème pour les séries à termes positifs à termes généraux équivalents. Théorème pour les SATP avec un terme général négligeable par rapport à l'autre. Théorème de comparaison pour les SATP.
3. Séries télescopiques (définition, somme partielle, convergence, somme). Séries géométriques (définition, somme partielle, convergence, somme). Séries exponentielles (définition, convergence).
   Preuve de la convergence des séries exponentielles.
4. Comparaison série-intégrale. Enoncé, dessins, et preuve.
5. Séries de Riemann. Définition, convergence. Preuve dans le cas $\alpha > 1$ uniquement.
6. Définition d'un sous-espace vectoriel et de $Vect(x_1, \dots, x_n)$.
   Preuve que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-ev.

Au moins un exercice sur les espaces vectoriels par élève, pour reprendre les combinaisons linéaires et la résolution de systèmes linéaires.