

PROGRAMME DE COLLE - COLLE N° 3

■ Suites et séries 2 ■

- $(u_n)_{n \geq 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \geq 0}$ si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. On le note $u_n = o(v_n)$.
 $(u_n)_{n \geq 0}$ est équivalente à $(v_n)_{n \geq 0}$ si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$. On le note $u_n \sim v_n$.
- La relation $u_n = o(v_n)$ n'est pas symétrique. Pour $u_n = o(n^2)$ on a $u_n = o(n^4)$, mais si $v_n = o(n^4)$ rien n'assure que $v_n = o(n^2)$.
- : Règles de calculs des o : $o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)$, $o(v_n)o(w_n) = o(v_n w_n)$, $o(v_n) = v_n o(1)$, $o(\lambda v_n) = o(v_n)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$), $o(o(v_n)) = o(v_n)$.
- Règles de calcul pour des équivalents : Si $u_n \sim v_n$ on a $v_n \sim u_n$, et $u_n^a \sim v_n^a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ on a $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
 Contre-ex : $n^2 + 1 \sim n^2 + n$, $-n^2 + 1 \sim -n^2 + n$, mais $(n^2 + 1) + (-n^2 + 1) \not\sim (n^2 + n) + (-n^2 + n)$.
 Rem : Les notations $u_n = o(0)$ et $u_n \sim 0$ n'ont pas de sens.
- On a $u_n = o(1)$ ssi $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est CV, de limite λ , ssi $u_n = \lambda + o(1)$.
 Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \lambda$ ssi $u_n \sim \lambda$. (Faux pour $\lambda = 0$)
 Savoir calculer un équivalent d'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ pour déterminer son comportement (convergence, divergence). Savoir utiliser les o pour montrer la convergence d'une suite (en général vers 0).
- Connaître les croissances comparées pour les suites.
- Définition du point fixe pour une fonction f ($f(l) = l$).
- Suites récurrentes construites via " $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ ".
 Définition d'un ensemble F stable pour une fonction f . Si $u_0 \in F$, alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ existe. Si la limite l existe dans D_f , c'est un point fixe de f ($f(l) = l$). Si f est croissante sur F , la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est monotone (dépend du signe de $f(u_0) - u_0$).

- Utiliser l'Inégalité des Accroissements Finis (IAF) pour encadrer $|f(x) - f(y)|$, à appliquer pour u_n et l , dans le cas où f' ne prend que de petites valeurs ($|f'| \leq k < 1$).
- Suites implicites définies par la relation $f_n(u_n) = 0$.
 L'existence vient de l'étude des fonctions f_n .
 La monotonie de la suite $(u_n)_n$ s'étudie via le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
- Suites implicites définies par la relation $f(u_n) = n$.
 L'existence vient de l'étude de la fonction f .
 La monotonie et la limite de la suite $(u_n)_n$ s'étudient via le tableau de variations de f .
- Définition d'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Somme partielle S_n . Nature (convergente/divergente), somme $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$. Série absolument convergente.
- Connaître les propriétés des séries convergentes : Le terme général u_n tend vers 0, somme et multiples de séries CV.
- Savoir prouver correctement la convergence d'une série : Critère de convergence des séries à termes positifs. Propriété des séries absolument convergentes. Encadrement de séries à termes positifs. Critère de comparaison série-intégrale. Séries à termes généraux équivalents. Terme général négligeable devant un autre. Méthode des croissances comparées.
- Connaître les exemples de référence (déf, nature, somme) : Série géométrique $\sum_{n \geq 0} q^n$, série télescopique $\sum_{n \geq n_0} (v_{n+1} - v_n)$, série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$, séries géométriques dérivées $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$, séries de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$, série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.
- Savoir utiliser les exemples de référence pour montrer qu'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est convergente ou divergente (comparaison, équivalent).
 Savoir déterminer la somme d'une série à partir des séries de référence.
- Savoir effectuer un calcul de somme de série dans un cas simple ou classique.

■ Espaces vectoriels ■

- Connaître les espaces vectoriels usuels $\mathbb{R}^n$, $M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_m[X]$, leurs opérations et leurs vecteurs nuls.
Leurs dimensions sont respectivement n , pq et $m + 1$.
- Définition d'un sous-espace vectoriel. Pour une partie F d'un espace vectoriel réel E , vérifier que $0_E \in F$, puis que pour tous $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $\lambda u + \mu v \in F$.
- L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E . Ce n'est pas le cas de leur réunion en général.
- Définition d'une combinaison linéaire et de l'espace engendré par une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}.$$
- Savoir montrer qu'un vecteur appartient à un sous-espace engendré en trouvant des coefficients convenables. Pour montrer qu'il n'y appartient pas, établir que le système obtenu n'a aucune solution.

Questions de cours :

- Soient $(u_n)_{n \geq n_0}, (v_n)_{n \geq n_0}, (w_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$ des suites réelles, avec $(v_n)_{n \geq n_0}, (t_n)_{n \geq n_0}$ qui sont non-nulles à partir d'un certain rang. Définition de $u_n \sim v_n$.
Propriétés de $\sim$ pour les suites :
 - Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
 - Si $u_n \sim v_n$, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
 - Si $u_n \sim v_n$ et si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont positives, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.
 Equivalents usuels : Si $u_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, $\exp(u_n) - 1 \sim u_n$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.
- Théorème sur la convergence de séries à termes positifs. Théorème pour les séries à termes positifs à termes généraux équivalents. Théorème pour les SATP avec un terme général négligeable par rapport à l'autre. Théorème de comparaison pour les SATP.
- Séries télescopiques (définition, somme partielle, convergence, somme). Séries géométriques (définition, somme partielle, convergence, somme). Séries exponentielles (définition, convergence).
Preuve de la convergence des séries exponentielles.
- Comparaison série-intégrale. Enoncé, dessins, et preuve.
- Séries de Riemann. Définition, convergence. Preuve dans le cas $\alpha > 1$ uniquement.

6. Définition d'un sous-espace vectoriel et de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Preuve que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-ev.

Au moins un exercice sur les espaces vectoriels par élève, pour reprendre les combinaisons linéaires et la résolution de systèmes linéaires.