

PROGRAMME DE COLLE - COLLE N° 4

■ *Rappels sur les matrices* ■

- Définition d'une matrice à coefficients réels. Coefficient $m_{i,j}$ d'une matrice M . Ecriture $M = (m_{i,j})_{i,j}$. Ensemble de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ensemble de matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Connaître les matrices particulières : nulle $O_{n,p}$, identité I_n , élémentaires $E_{i,j}$.
- Formes particulières de matrices : triangulaire (supérieure ou inférieure), diagonale, symétrique, antisymétrique, inversible.
- Opérations matricielles : somme, multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$, produit de matrices, puissance de matrices.
Savoir réaliser les opérations matricielles à l'aide des coefficients des matrices. $((A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}, (\lambda A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}, (A.B)_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j})$.
Savoir représenter au brouillon un produit de matrices correctement, et faire attention aux tailles de matrices.
- Le produit matriciel n'est en général pas commutatif.
- Lorsque A et B commutent, toutes les relations algébriques connues s'appliquent (identités remarquables, formule du binôme pour $(A+B)^n$, $A^n - B^n$).
- Calcul des puissances d'une matrice (par la formule du binôme, ou par récurrence).
- Transposée d'une matrice. Transposée et produit $({}^T(A.B) = B^T.A^T)$
- Matrice carrée inversible. Définition. Une matrice inversible possède un unique inverse, noté M^{-1} . Ensemble $GL_n(\mathbb{K})$. Proposition : $M \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi il existe $M' \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $MM' = I_n$ ou $M'M = I_n$.
Un produit de matrices inversibles est inversible. On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Cas des matrices 2×2 : Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, M est inversible ssi $\det(M) = ad - bc$ est non-nul. Et, on a $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Système linéaire de n équations à p inconnues. Correspondance entre système linéaire (S) et équation matricielle $MX = B$.
Résolution d'un système linéaire échelonné (pas de solutions, une solution, ou une infinité de solutions).
Résolution d'un système linéaire avec la méthode du Pivot sur les lignes.
Savoir reconnaître la forme des solutions d'un système linéaire.
- Matrices échelonnées. Concaténation de deux matrices. Opérations élémentaires sur les lignes.
Méthode du Pivot sur les lignes pour échelonner une matrice M .
- Méthode du Pivot et inverse : Une matrice carrée M est inversible ssi elle s'échelonne en une matrice dont les coefficients diagonaux sont tous non-nuls.
En échelonnant la matrice $(M|I_n)$ de la forme $(I_n|M')$, on a $M' = M^{-1}$.

■ *Rappels sur les polynômes* ■

- Définition d'un polynôme via les fonctions polynômiales. Coefficients d'un polynôme. Ecriture $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Ensemble de polynômes $\mathbb{R}[X]$.
- Somme de polynômes $P + Q$, multiplication par un scalaire $\lambda.P$, produit de polynômes $P \times Q$.
Savoir calculer une somme et un produit de polynômes proprement (réarranger les coefficients selon les puissances de X).
- Degré d'un polynôme, coefficient dominant. Cas particulier du polynôme nul. Degré d'une somme et d'un produit de polynômes. Ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ de polynômes de degré majoré par n . Savoir identifier le degré d'un polynôme.
- Evaluation d'un polynôme P en un nombre x , notée $P(x)$.
- Un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.
- Division euclidienne de polynômes : Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que $P = AQ + R$, $\deg(R) < \deg(Q)$.
Savoir calculer une division euclidienne de polynômes. Liens avec la division euclidienne d'entiers.
- Définition de A divise P . A divise P ssi le reste dans la div. eucl. de A par P est nul.
- a est une racine du polynôme P si $P(a) = 0$. a est une racine ssi $(X - a)$ divise P .
Multiplicité d'une racine a . Polynômes scindés, scindés à racines simples.
- Polynôme dérivé P' . Savoir dériver un polynôme P . Degré de P' .
Caractérisation des racines multiples : a est une racine de P de multiplicité k ssi $P(a) = 0, P'(a) = 0, \dots, P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.

- Relations entre coefficients et racines pour les polynômes de degré 2.
(x, y) est solution du système " $x + y = a$ et $xy = b$ " ssi x et y sont les racines de $P(X) = X^2 - aX + b$. Savoir résoudre un tel système d'équations.

■ *Rappels sur $\mathbb{R}^n$* ■

- Combinaison linéaire de vecteurs ($x + \lambda y, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$). Savoir identifier et calculer une combinaison linéaire.
- Sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ engendré par une famille de vecteurs.
 $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de $x_1, \dots, x_n$. C'est le plus petit sous-ev contenant la famille $(x_1, \dots, x_n)$.
Un vecteur x s'écrit comme une combi. lin. de $x_1, \dots, x_n$ ssi $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
- Familles libres, familles génératrices, bases.
Savoir montrer qu'une famille est libre/génératrice/une base.
Connaître les bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Une famille est liée ssi l'un de ses vecteurs s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Une famille de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$ ssi elle est libre ssi elle est génératrice de $\mathbb{R}^n$. Utiliser ce résultat pour déterminer plus rapidement si une famille est une base de $\mathbb{R}^n$ ou non.
- Décomposition des vecteurs dans une base de $\mathbb{R}^n$.
Savoir décomposer un vecteur dans une base $\mathbb{R}^n$, savoir simplifier des combinaisons linéaires.
Savoir montrer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs via ses coefficients.

■ *Espaces vectoriels* ■

- Connaître les espaces vectoriels usuels $\mathbb{R}^n, M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_m[X]$, leurs opérations et leurs vecteurs nuls.
Leurs dimensions sont respectivement n, pq et $m + 1$.
- Définition d'un sous-espace vectoriel. Pour une partie F d'un espace vectoriel réel E , vérifier que $0_E \in F$, puis que pour tous $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $\lambda u + \mu v \in F$.
- L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E . Ce n'est pas le cas de leur réunion en général.
- Définition d'une combinaison linéaire et de l'espace engendré par une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

- Savoir montrer qu'un vecteur appartient à un sous-espace engendré en trouvant des coefficients convenables. Pour montrer qu'il n'y appartient pas, établir que le système obtenu n'a aucune solution.

- Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E est libre si l'égalité $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0_E$ implique $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.
Elle est liée s'il existe une telle relation avec au moins un coefficient non nul.
- Une famille de polynômes écheonnée en degré est une famille libre.
- Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Savoir obtenir une famille génératrice à partir d'une écriture paramétrique des vecteurs d'un sous-espace.
- Définition d'une base : famille libre et génératrice.
Chaque vecteur admet alors une unique décomposition dans cette base. Les coefficients, rangés dans l'ordre des vecteurs de la base, sont ses coordonnées.
- Connaître les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, de $M_{p,q}(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}_m[X]$: vecteurs unités, matrices E_{ij} et famille $(1, X, \dots, X^m)$.
- Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie : nombre de vecteurs d'une base.
Si F est un sous-espace de E et $\dim E = n$, alors $\dim F \leq n$, avec égalité si et seulement si $F = E$.
- Dans un espace de dimension n , une famille libre contient au plus n vecteurs et une famille génératrice au moins n vecteurs. Une famille de n vecteurs est une base dès qu'elle est libre ou génératrice.
- Savoir extraire une base d'une famille génératrice et compléter une famille libre en une base. Savoir déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel.
- Définition du rang d'une famille : $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))$. Dans un espace de dimension n , le rang vaut p si et seulement si la famille est libre.
- Savoir écrire la matrice d'une famille en plaçant les coordonnées des vecteurs en colonnes dans une base fixée, puis calculer son rang par le pivot.
- Savoir éliminer des vecteurs d'une famille génératrice et non libre à l'aide de la méthode du Pivot.
- Définition de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$: ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.
Connaître et savoir utiliser $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$.

Questions de cours :

1. Comparaison série-intégrale. Enoncé, dessins, et preuve.
2. Définition d'un sous-espace vectoriel et de $Vect(x_1, \dots, x_n)$.
Preuve que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-ev.
3. Définition de la dimension d'un espace vectoriel. Dimension des ev usuels $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X], M_{n,p}(\mathbb{R})$.
Propriétés de la dimension : Si F est un sous-espace de E et $\dim E = n$, alors $\dim F \leq n$, avec égalité si et seulement si $F = E$. Et $F = \{0_E\}$ ssi $\dim(F) = 0$.
4. Propriété : Pour E un e.v. de dimension n et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E ayant n vecteurs, cette famille est une base de E ssi elle est libre ssi elle est génératrice de E . Preuve de $(x_1, \dots, x_n)$ libre implique $(x_1, \dots, x_n)$ génératrice de E .
5. Définition du rang d'une famille de vecteurs. Propriété du rang. Calcul du rang d'une famille de vecteurs sur un exemple (ex : $(X + 1, (X + 1)^2, X - 2)$, $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$, $((1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9))$).
6. Définition de la matrice de passage $P_{B \rightarrow B'}$, propriétés, relation de changement de base.

Pour les colleurs : On peut donner des exercices dans l'esprit des sujets, portés sur l'étude d'une application linéaire (noyau, polynôme annulateur, valeurs propres, espaces propres) en reformulant les éléments recherchés en termes de vecteurs/espaces vectoriels/reliations de dépendance linéaire.

Un exercice avec une comparaison série-intégrale à effectuer pour un encadrement ou un équivalent de somme peut être posé.