

Chapitre 3

Couples de variables aléatoires discrètes

Table des matières

1	Décrire simultanément deux variables aléatoires	1
1.1	Loi conjointe	1
1.2	Lois marginales	2
1.3	Lois conditionnelles	3
2	Indépendance de deux variables	4
3	Déterminer la loi de $g(X, Y)$	5
3.1	Somme de variables	6
3.2	Minimum et maximum	7
3.3	Sommes de lois usuelles	8
4	Espérance, covariance et corrélation	9
4.1	Calculer une espérance à partir de la loi conjointe	9
4.2	Covariance	9
4.3	Coefficient de corrélation linéaire	10
5	Familles de variables indépendantes	11
6	Complément : Indicatrices d'événements	13
7	Complément : Absence de mémoire géométrique	14
8	Complément : Fonctions génératrices	15
8.1	Définition et lecture de la loi	15
8.2	Calculer les moments	16
8.3	Fonctions génératrices usuelles	16
8.4	Somme de variables indépendantes	17
	Bilan du chapitre	18

1 Décrire simultanément deux variables aléatoires

Dans une expérience aléatoire avec des résultats variés, on peut s'intéresser à plusieurs résultats en même temps : la victoire à un jeu et le nombre de tours nécessaires, le nombre de Pile obtenus et le premier lancer où Pile a été obtenu, les gains de deux joueurs différents. Les variables aléatoires associées aux résultats, prises séparément, ne décrivent pas les liens qui existent entre elles (sauf dans le cas d'indépendance, si tant est que l'on sait prouver qu'il y a indépendance). Il faut donc introduire un nouvel objet (une variable aléatoire) pour étudier le comportement de plusieurs variables aléatoires simultanément.

On rappelle les notations de première année.

Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: Ω est un ensemble (l'univers), $\mathcal{A}$ est un ensemble de parties de Ω (l'ensemble des événements) et $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilités (une fonction de $\mathcal{A}$ vers $[0, 1]$ qui vérifie 2 propriétés). Un élément ω de Ω est une issue, et une partie B de Ω est un événement.

Pour A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$ on pose $\mathbb{P}_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ la probabilité conditionnelle de A sachant B . La fonction $A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ est aussi une mesure de probabilité.

Une variable aléatoire réelle est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui est mesurable ($\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$).

On utilise principalement les événements : $(X = x) = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega) = x\}$, $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega) \leq x\}$, $(X \in I) = \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega) \in I\}$ (pour I une partie de $\mathbb{R}$).

Une variable aléatoire réelle est **discrète** lorsque son image $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable.

Un ensemble dénombrable est un ensemble infini qui est en bijection avec $\mathbb{N}$ (ex : $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$).

Une v.a.r. discrète est caractérisée par la famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Cette famille est appelée la loi de X .

Les lois discrètes usuelles sont les lois de Bernoulli, binomiale, uniforme, géométrique, de Poisson.

A partir de la loi d'une variable aléatoire X , on définit l'espérance et la variance de X ($\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$). Si $X(\Omega)$ est dénombrable ces quantités existent uniquement si les séries associées sont absolument convergentes (ex : $\mathbb{E}(X)$ existe ssi $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X = x)$ est convergente).

Dans tout ce cours, on se fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui sera utilisé dans tous les énoncés.

1.1 Loi conjointe

DÉFINITION 1 (Loi d'un couple)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soient X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes.

La **loi du couple** (X, Y) , ou **loi jointe**, est la donnée de $X(\Omega)$, de $Y(\Omega)$ et des probabilités

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]), \quad \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

REMARQUE 2 — On rappelle que l'on note aussi $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$.

On a $\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1$.

Autrement dit, la loi jointe de (X, Y) correspond à une loi de variable aléatoire discrète (c'est la loi de $Z : \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$).

L'ensemble produit $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ contient tous les couples que l'on peut former à partir des valeurs possibles de X et Y .

Certains de ces couples peuvent être de probabilité nulle, rien ne garantit que $\mathbb{P}(X = x, Y = y) > 0$ en général.

Si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, on présente souvent la loi jointe dans un tableau.

EXEMPLE 3 — Une urne contient deux boules rouges et une boule bleue. On tire successivement deux boules, sans remise. La variable X vaut 1 lorsque la première boule est rouge et 0 sinon ; Y vaut 1 lorsque la seconde boule est rouge et 0 sinon. On cherche la loi de (X, Y) .

Chacune des variables prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$. Pour calculer la case $(1, 1)$, on écrit l'événement « la première et la seconde boules sont rouges ». La formule des probabilités composées donne

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}_{[X=1]}(Y = 1).$$

Au premier tirage, deux des trois boules sont rouges : $\mathbb{P}(X = 1) = 2/3$. Sachant que ce tirage a donné une rouge, il reste une rouge et une bleue ; donc $\mathbb{P}_{[X=1]}(Y = 1) = 1/2$. Ainsi $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/3$.

Pour la même raison, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = (2/3)(1/2) = 1/3$. Si la première boule est bleue, les deux boules restantes sont rouges ; donc $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = (1/3) \times 1 = 1/3$. Enfin, il n'existe qu'une boule bleue et le tirage est sans remise : $[X = 0] \cap [Y = 0] = \emptyset$, d'où $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0$. On obtient

$X \backslash Y$	0	1
0	0	1/3
1	1/3	1/3

On remarquera que la somme de toutes les probabilités du tableau vaut 1.

PROPOSITION 4 (Construction d'une loi jointe)

Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$ finies ou dénombrables. Pour tout $(a, b) \in A \times B$, soit $p_{a,b} \in [0, 1]$. On suppose que :

- Pour tout $a \in A$ la série $\sum_{b \in B} p_{a,b}$ est convergente. (si B est fini la condition est automatiquement vérifiée).
- La série $\sum_{a \in A} (\sum_{b \in B} p_{a,b})$ est convergente. (si A est fini la condition est automatiquement vérifiée)
- La somme S de la série $\sum_{a \in A} (\sum_{b \in B} p_{a,b})$ vaut 1.

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et deux variables aléatoires X, Y sur Ω telles que $X(\Omega) = A$, $Y(\Omega) = B$, et, pour tout $(a, b) \in A \times B$, $\mathbb{P}(X = a, Y = b) = p_{a,b}$. Autrement dit, la famille $(p_{a,b})_{a \in A, b \in B}$ est la loi jointe du couple (X, Y) .

Cette proposition permet d'étudier des exemples théoriques en retirant grandement la structure de variables aléatoires : tout dépend de la convergence et de la somme de séries (ou de sommes) d'une famille de nombres réels entre 0 et 1.

En exercice on fera toujours attention à vérifier la convergence des séries concernées avant de se lancer sur un calcul de somme, sauf si l'énoncé ou un élément précédent indique que celles-ci convergent.

EXERCICE 1 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ on pose $p_{i,j} = 2 \frac{i+j}{n^2(n+1)}$. La famille $(p_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2}$ représente-t-elle une loi jointe ?

1.2 Lois marginales

PROPOSITION-DÉFINITION 5 (Lois marginales)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes.

Les lois de X et de Y sont appelées les **lois marginales** du couple.

Elles s'obtiennent via :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y), \quad \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

REMARQUE 6 — Ainsi, connaître la loi conjointe permet de retrouver les deux marginales.

La réciproque est fautive : les mêmes marginales peuvent correspondre à des liens différents entre les variables. Avoir la même loi ne signifie donc ni être égales, ni être indépendantes.

EXEMPLE 7 — Reprenons les indicatrices X, Y des couleurs de deux tirages sans remise dans l'urne contenant deux rouges et une bleue. Pour obtenir $[Y = 1]$, la première boule peut être bleue ou rouge. Plus précisément,

$$[Y = 1] = ([X = 0] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 1] \cap [Y = 1]).$$

Les deux événements de cette union sont incompatibles, car la première boule ne peut pas être à la fois rouge et bleue. Par additivité,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

De même, $\mathbb{P}(Y = 0) = 0 + 1/3 = 1/3$. La loi de Y est donc $\mathcal{B}(1, 2/3)$. En sommant cette fois les lignes, on trouve $\mathbb{P}(X = 0) = 1/3$ et $\mathbb{P}(X = 1) = 2/3$: X suit la même loi. On peut compléter le tableau par ses marges :

$X \backslash Y$	0	1	$\mathbb{P}(X = x)$
0	0	1/3	1/3
1	1/3	1/3	2/3
$\mathbb{P}(Y = y)$	1/3	2/3	1

La loi de la seconde couleur est ainsi obtenue sans supposer que la composition de l'urne est restée inchangée.

1.3 Lois conditionnelles

DÉFINITION 8 (Loi conditionnelle)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et $y \in Y(\Omega)$ t.q. $\mathbb{P}(Y = y) > 0$.

La loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est la famille $(\mathbb{P}_{[Y=y]}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

De même, si $x \in X(\Omega)$ vérifie $\mathbb{P}(X = x) > 0$, on définit la loi de Y sachant $[X = x]$ par $(\mathbb{P}_{[X=x]}(Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$.

EXEMPLE 9 — Dans le même tirage sans remise, on sait maintenant que la seconde boule est rouge. L'événement de conditionnement est $[Y = 1]$, et $\mathbb{P}(Y = 1) = 2/3 > 0$.

On a alors :

$$\mathbb{P}_{[Y=1]}(X = 0) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}_{[Y=1]}(X = 1) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

On reconnaît que la loi conditionnelle de X sachant $[Y = 1]$ est une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Elle diffère de la loi de X qui est une loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{3}$.

Sachant $[Y = 0]$, la seconde boule est bleue ; la première est nécessairement rouge. On peut le retrouver par $\mathbb{P}_{[Y=0]}(X = 1) = (1/3)/(1/3) = 1$ et $\mathbb{P}_{[Y=0]}(X = 0) = 0$. La loi conditionnelle de X sachant $[Y = 0]$ est ici une loi de Bernouilli de paramètre 1 (une loi certaine : la probabilité d'obtenir 1 est de 100%).

EXERCICE 2 — On prend deux urnes A et B . On choisit au hasard l'urne A avec probabilité $1/3$ et l'urne B avec probabilité $2/3$. Une boule tirée dans A est rouge avec probabilité $3/4$; et avec probabilité $1/2$ dans B . On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si l'urne choisie est l'urne A et 1 si l'urne choisie est l'urne B , et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule rouge et 0 sinon. Décrire la loi jointe de (X, Y) .

2 Indépendance de deux variables

DÉFINITION 10 (Variables indépendantes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes.

On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

PROPOSITION 11

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

Pour toutes parties $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}([X \in A] \cap [Y \in B]) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

Tous les événements relatifs à X sont indépendants des événements relatifs à Y .

PROPOSITION 12

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes.

Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $y \in Y(\Omega)$ t.q. $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ égale à la loi de X .

De plus, la réciproque est vraie.

Le concept de loi jointe trouve tout son intérêt entre deux variables aléatoires X et Y qui ne sont pas indépendantes.

Cela est la même chose pour les probabilités conditionnelles : leur calcul a son intérêt dans le cas d'événements qui ne sont pas indépendants.

La réciproque a aussi son intérêt : si les lois marginales de X sachant Y sont toutes identiques à la loi de X , alors X et Y sont indépendantes. Lors d'études, cela permet de déterminer si deux paramètres sont indépendants ou non.

EXEMPLE 13 — Pour les deux tirages sans remise de l'urne contenant deux rouges et une bleue, on a $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes. On pouvait aussi le constater via la loi marginale de X selon $[Y = 0]$.

EXERCICE 3 — On donne la loi de deux variables X, Y à valeurs dans $\{0, 1\}$:

$X \backslash Y$	0	1	$\mathbb{P}(X = x)$
0	1/6	1/3	1/2
1	1/6	1/3	1/2
$\mathbb{P}(Y = y)$	1/3	2/3	1

Déterminer si les X et Y sont-elles indépendantes.

EXEMPLE 14 — On suppose avoir X, Y deux variables aléatoires avec $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, et telles que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 3 \cdot 2^{-(i+1)} \cdot 4^{-(j+1)}.$$

On souhaite vérifier que ces valeurs définissent bien une loi jointe de v.a., calculer les lois marginales de X sachant Y et de Y sachant X , puis étudier l'indépendance entre X et Y .

Toutes les probabilités sont non-nulles.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixé, on a $3 \cdot 2^{-(i+1)} \cdot 4^{-(j+1)} = \frac{3}{4} \cdot 2^{-(i+1)} \frac{1}{4^j}$. On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{4}$ multiplié par une constante. Donc, la série $\sum_{j \in \mathbb{N}} 3 \cdot 2^{-(i+1)} \cdot 4^{-(j+1)}$ est une série convergente. Et sa somme vaut : $\sum_{j=0}^{+\infty} 3 \cdot 2^{-(i+1)} \cdot 4^{-(j+1)} = 2^{-(i+1)} \frac{3}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 2^{-(i+1)}$.

On reconnaît le terme général d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, multiplié par une constante.

Donc la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} (\sum_{j=0}^{+\infty} 3 \cdot 2^{-(i+1)} \cdot 4^{-(j+1)})$ est convergente, et sa somme vaut :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} 3 \cdot 2^{-(i+1)} \cdot 4^{-(j+1)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2^i} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$

Ainsi, il existe bien deux variables aléatoires X et Y , sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, et dont $(p_{i,j})_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}}$ est la loi jointe.

De plus, le calcul pour i fixé donne $\mathbb{P}(X = i) = 2^{-(i+1)}$. En fixant j et en sommant sur $i \in \mathbb{N}$, on obtient $\mathbb{P}(Y = j) = 3 \cdot 4^{-(j+1)}$.

Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, le produit de ces deux probabilités est exactement $p_{i,j}$. Ainsi X et Y sont indépendantes. La formule proposée est un produit d'un terme dépendant de i et d'un terme dépendant de j . Cela suggère l'indépendance ; pour la justifier, nous avons vérifié que ces deux termes sont bien les probabilités marginales.

EXEMPLE 15 — On considère une variable X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, et telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X = i) = 2^{-(i+1)}$.

On considère une seconde variable Y telle que Y sachant $[X = i]$ est de loi uniforme sur $\{0, \dots, i\}$. Nous allons construire la loi jointe du couple (X, Y) .

En tout premier lieu, X et Y ne sont pas indépendantes puisque pour différentes valeurs de i la loi de Y sachant $[X = i]$ change (pas la même loi uniforme).

Soit $i \in \mathbb{N}$. Soit $j \in \mathbb{N}$. Si $0 \leq j \leq i$ on a donc $\mathbb{P}_{[X=i]}(Y = j) = 1/(i+1)$, et si $j > i$ on a $\mathbb{P}_{[X=i]}(Y = j) = 0$. On en déduit que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

On obtient aussi : $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j | X = i) = \begin{cases} \frac{1}{(i+1)2^{i+1}} & 0 \leq j \leq i, \\ 0 & j > i. \end{cases}$

Les couples de probabilité non nulle sont ceux dont les coordonnées vérifient $0 \leq j \leq i$.

On peut remarquer que l'on a donc toujours $Y \leq X$.

Pour déterminer la loi de Y (la marginale de Y), on fixe cette fois $j \in \mathbb{N}$. On obtient :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)2^{i+1}}.$$

Une expression plus simple de cette probabilité peut se déterminer (bien que cela ne soit pas simple), mais on a déjà une expression satisfaisante. Rien ne garantit que la somme obtenue se simplifie.

3 Déterminer la loi de $g(X, Y)$

PROPOSITION 16 (Loi de $g(X, Y)$)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Alors $Z = g(X, Y)$ est une v.a. discrète. Pour tout $z \in g(X(\Omega) \times Y(\Omega))$, on a :

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

REMARQUE 17 — En particulier, $X + Y$, XY , $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ sont des v.a. discrètes. Ce sont les cas que l'on rencontre le plus fréquemment.

REMARQUE 18 — La variable aléatoire $g(X, Y)$ ne prend pas forcément toutes les valeurs de $g(X(\Omega) \times Y(\Omega))$, car certains événements $(X = x, Y = y)$ peuvent être de probabilité nulle.

EXEMPLE 19 — Reprenons l'exemple de l'urne avec deux boules rouges et une bleue. On cherche la loi de $S = X + Y$. Cette variable compte le nombre de boules rouges obtenues ; elle prend les valeurs 1 ou 2 car obtenir deux boules bleues sont impossibles.

On a $[S = 1] = [X = 0, Y = 1] \cup [X = 1, Y = 0]$ et $[S = 2] = [X = 1, Y = 1]$. Par union d'événements disjoints, on obtient $\mathbb{P}(S = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(S = 2) = \frac{1}{3}$.

Pour $T = XY$, les seules valeurs que T peut prendre sont 0 et 1. On a $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/3$ et donc $\mathbb{P}(T = 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

PROPOSITION 20 (**Image de $g(X, Y)$, cas entier**)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Alors $Z = g(X, Y)$ est une v.a. discrète, et $Z(\Omega) \subset g(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

En particulier, pour $Z = X + Y$, $Z = XY$, $Z = \max(X, Y)$, $Z = \min(X, Y)$, on a $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Cette information est utile pour déterminer plus facilement la loi de Z .

3.1 Somme de variables

PROPOSITION 21

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles.

Pour tout $k \in (X + Y)(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega) \mid z-x \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = z - x).$$

Si X, Y sont indépendantes, on obtient :

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega) \mid z-x \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = z - x).$$

PROPOSITION 22 (**Cas des v.a. à valeurs entières**)

Soient X, Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i, Y = k - i).$$

Si X, Y sont indépendantes, on obtient :

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i).$$

EXEMPLE 23 — Soient X, Y deux v.a. indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, et posons $S = X + Y$.

Les valeurs possibles pour S sont 2, 3, 4, 5, 6. Pour chaque couple $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ la probabilité $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ vaut $(1/3)(1/3) = 1/9$, par indépendance.

On a $(S = 4) = (X = 1, Y = 3) \cup (X = 2, Y = 2) \cup (X = 3, Y = 1)$. Ces trois événements sont disjoints, donc $\mathbb{P}(S = 4) = 3/9$. Et $(S = 2) = (X = 1, Y = 1)$, et $(S = 3) = (X = 1, Y = 2) \cup (X = 2, Y = 1)$, et $(S = 5) = (X = 2, Y = 3) \cup (X = 3, Y = 2)$, et $(S = 6) = (X = 3, Y = 3)$. Ainsi, on obtient

k	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(S = k)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

Bien que X et Y soient de loi uniforme, leur somme ne l'est pas (on parle de loi triangulaire).

EXEMPLE 24 — Soient X, Y deux v.a. indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Posons $q = 1 - p$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = pq^{i-1}$.

On pose $S = X + Y$. Alors S prend toujours des valeurs entières supérieures ou égales à 2.

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Si $X = i$ et $Y = k - i$ on a $i \geq 1$ et $k - i \geq 1$ donc $1 \leq i \leq k - 1$. Ainsi, on obtient :

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} p^2 q^{i-1+k-i-1} = (k-1)p^2 q^{k-2}.$$

Cela prouve aussi que $S(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

EXEMPLE 25 — Soient X et Y deux v.a. indépendantes, X de loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$ et Y de loi uniforme sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. On pose $S = X + Y$.

La v.a. S prend des valeurs entières entre $0 + 1 = 1$ et $3 + 4 = 7$. Pour $k \in \{1, \dots, 7\}$ et $i \in \mathbb{N}$, si $X = i$ et $Y = k - i$ on a alors $1 \leq i \leq 3$ et $0 \leq k - i \leq 4$, c'est-à-dire $1 \leq i \leq 3$ et $k - 4 \leq i \leq k$. Pour satisfaire les deux à la fois, il faut donc $\max(1, k - 4) \leq i \leq \min(3, k)$.

$$\text{On obtient donc } \mathbb{P}(S = k) = \sum_{i=\max(1, k-4)}^{\min(3, k)} \mathbb{P}(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=\max(1, k-4)}^{\min(3, k)} \frac{1}{3} \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \sum_{i=\max(1, k-4)}^{\min(3, k)} 1 = \frac{\min(3, k) - \max(1, k - 4)}{15}.$$

Par exemple, pour $k = 2$ on obtient $\mathbb{P}(S = 2) = 2/15$. On obtient ainsi :

k	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(S = k)$	1/15	2/15	3/15	3/15	3/15	2/15	1/15

3.2 Minimum et maximum

PROPOSITION 26 (**Fonction de répartition et extrema**)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $M = \max(X, Y)$ et $L = \min(X, Y)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{P}(M \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) \mathbb{P}(Y \leq t), \quad \mathbb{P}(L > t) = \mathbb{P}(X > t) \mathbb{P}(Y > t).$$

REMARQUE 27 — On peut ainsi facilement déterminer la fonction de répartition de $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ si X et Y sont indépendantes.

De plus, les v.a. $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ ont une image incluse dans $X(\Omega) \cup Y(\Omega)$.

On rappelle que pour toute variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k - 1) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k + 1).$$

On peut ainsi combiner la proposition avec ce résultat dans le cas où X et Y prennent des valeurs entières pour déterminer la loi de $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$.

EXEMPLE 28 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux v.a. indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. On pose $M = \max(X, Y)$. On a donc $M(\Omega) \subset \{1, \dots, n\}$.

Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On a $M \leq k$ ssi $X \leq k$ et $Y \leq k$, donc $(M \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k)$.

Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}(M \leq k) = P(X \leq k)P(Y \leq k) = \frac{k}{n} \frac{k}{n} = \frac{k^2}{n^2}.$$

On a de même $P(M \leq 0) = 0 = \frac{0^2}{n^2}$. Les v.a. étant à valeurs entières, on obtient :

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \leq k) - \mathbb{P}(M \leq k - 1) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k - 1)^2}{n^2} = \frac{2k - 1}{n^2}.$$

EXEMPLE 29 — En reprenant les v.a. de l'exemple précédent, posons $L = \min(X, Y)$. On a $L(\Omega) \subset \{1, \dots, n\}$. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On a $L \geq k$ ssi $X \geq k$ et $Y \geq k$, donc $(L \geq k) = (X \geq k) \cap (Y \geq k)$.

On obtient par indépendance :

$$\mathbb{P}(L \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)P(Y \geq k) = \left(\frac{n - k + 1}{n}\right)^2.$$

Pour $k = n + 1$, cette probabilité est nulle.

Les v.a. étant à valeurs entières, on obtient : En soustrayant la probabilité du seuil suivant, on obtient

$$\mathbb{P}(L = k) = \mathbb{P}(L \geq k) - \mathbb{P}(L \geq k + 1) = \frac{(n - k + 1)^2 - (n - k)^2}{n^2} = \frac{2(n - k) + 1}{n^2}.$$

Ce résultat est bien vrai si $k = n$ car $\mathbb{P}(L \geq n + 1) = 0 = \left(\frac{n - (n + 1) + 1}{n}\right)^2$.

3.3 Sommes de lois usuelles

PROPOSITION 30

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Soient $p \in [0, 1]$, et $n, m \in \mathbb{N}^*$. Si X est de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Y de loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$, alors $X + Y$ est de loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.
- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si X est de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y est de loi $\mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y$ est de loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

EXEMPLE 31 — Si X est une v.a. binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{3}$, Y est une v.a. binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{3}$, et X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ est une v.a. binomiale de paramètres 7 et $\frac{1}{3}$. En particulier, $\mathbb{P}(X + Y = 2) = \binom{7}{2}(1/3)^2(2/3)^5$.

EXEMPLE 32 — Si X est une v.a. de loi de Poisson $\mathcal{P}(3)$, Y est une v.a. de loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$, et X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ est une v.a. de loi de Poisson $\mathcal{P}(8)$. En particulier $P(X + Y = 0) = e^{-8}$.

REMARQUE 33 — Cette proposition n'est vraie que si les v.a. sont indépendantes.

Sinon, en prenant par exemple $Y = X$, on a $X + Y = 2X$ et la v.a. en question n'a pas la loi attendue.

De plus, pour les v.a. de loi binomiale, il faut que celles-ci aient le même paramètre p .

4 Espérance, covariance et corrélation

4.1 Calculer une espérance à partir de la loi conjointe

THÉORÈME 34 (Théorème de transfert)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

La variable aléatoire $g(X, Y)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} |g(x, y)| \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right)$ existe et est convergente.

Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} g(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

La condition d'existence est automatique si les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.

PROPOSITION 35 (Propriétés de l'espérance)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérance finie. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $aX + bY$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
2. Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
3. Si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.
4. $|X|$ admet une espérance, et $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.
5. $\mathbb{E}(a) = a$. (espérance d'une v.a. constante).

Si, de plus, X, Y sont indépendantes, alors XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

PROPOSITION 36

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ d'espérance finie, et indépendantes.

Alors XY admet une espérance, et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

REMARQUE 37 — Si l'on obtient que $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ alors X et Y ne sont pas indépendantes. La réciproque est fausse.

Voici un contre-exemple : On prend X une v.a. de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Puis on pose Y une v.a. qui vaut 1 si $X \neq 0$ et -1 si $X = 0$. Alors X et Y ne sont pas indépendantes puisque par exemple $\mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$. Mais on a $XY = X$ ce qui implique que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

4.2 Covariance

DÉFINITION 38 (Covariance)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un **moment d'ordre 2**, c'est-à-dire telles que X^2 et Y^2 ont une espérance.

On définit la **covariance** de X et Y comme

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))).$$

Lorsque $\text{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont **non corrélées**.

PROPOSITION 39

Soient X, Y, Z des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ayant des moments d'ordre 2, et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors on a :

1. $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a \text{Cov}(X, Z) + b \text{Cov}(Y, Z)$
2. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
3. $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
4. $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
5. $\text{Cov}(X, a) = 0$
6. $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$

La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive. (C'est pratiquement un produit scalaire)

COROLLAIRE 40

Si X, Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

La réciproque est fautive. Des v.a. corrélées ne sont pas forcément indépendantes.

EXEMPLE 41 — Reprenons l'exemple de l'urne aux boules rouges et des v.a. X, Y associées. Ces v.a. sont finies donc elles ont une espérance et une variance. Comme leur loi est une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}$ et $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = (2/3)(1/3) = 2/9$.

Et les calculs pour XY donnent $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{3}$, d'où

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}, \quad \text{Var}(X + Y) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 2 \left(-\frac{1}{9} \right) = \frac{2}{9}.$$

REMARQUE 42 — On a $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ssi $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, donc le contre-exemple précédent est valide pour la covariance (covariance nulle mais v.a. non indépendantes).

4.3 Coefficient de corrélation linéaire

DÉFINITION 43

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui ont une variance, qui est non-nulle. Leurs écarts-types sont $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ et $\sigma(Y) = \sqrt{\text{Var}(Y)}$.

On définit leur **coefficient de corrélation linéaire** par

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

PROPOSITION 44

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de variances finies non-nulles.

Alors on a $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

De plus, on a $\rho(X, Y) = \pm 1$ si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, t.q. $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$ (Y coïncide avec $aX + b$ presque partout).

EXEMPLE 45 — Pour l'exemple de l'urne aux boules rouges, les écarts-types des deux v.a. valent $\sqrt{\frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Ainsi, on obtient $\rho(X, Y) = (-1/9)/((\sqrt{2}/3)(\sqrt{2}/3)) = -1/2$.

EXEMPLE 46 — Soit U une v.a. discrète de variance $v > 0$. Posons $V = 3 - 2U$.

Par linéarité de la covariance, on a $\text{Cov}(U, V) = \text{Cov}(U, 3) - 2\text{Cov}(U, U) = -2v$. Avec les propriétés de la variance on obtient $V(V) = 4v$. Donc

$$\rho(U, V) = \frac{-2v}{\sqrt{v}\sqrt{4v}} = -1.$$

Le calcul retrouve la valeur -1 attendue pour une relation de dépendance affine de coefficient directeur négatif.

REMARQUE 47 — Une variable aléatoire de variance nulle est une variable aléatoire qui est constante "presque partout" (il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$). Ce sont des variables aléatoires qui n'apportent aucune information de par le fait d'être constantes "presque partout", ce qui implique qu'elles sont exclues des calculs de corrélation.

REMARQUE 48 — On parle ici de corrélation linéaire (ou plus précisément affine). Un coefficient $\rho(X, Y)$ égal à ± 1 est un signe que Y est "presque partout" égale à une fonction affine en X .

Mais, pour X une v.a., la v.a. $Y = X^2$ est corrélée avec X (de même que $\exp(X)$ ou $|X|$), mais la relation entre ces deux variables n'est pas une relation affine. On ne trouvera donc pas un coefficient de corrélation linéaire égal à ± 1 .

Ce genre de phénomène se détecte assez bien sur des échantillons, et on peut alors tester d'autres types de corrélation en appliquant une fonction à Y ou à X . Pour $Y = X^2$ on trouverait que $\rho(X^2, Y) = 1$. Le coefficient de corrélation linéaire se comporte comme le cosinus d'un angle (même formule pour la définition géométrique du cosinus de l'angle entre deux vecteurs). C'est pour cela que les valeurs de 0 et de ± 1 sont particulières. Il faut ainsi bien comprendre que $\rho(X, Y)$ mesure une forme de corrélation entre X et Y . Plus la valeur est proche de 0 et moins X et Y seront corrélées.

5 Familles de variables indépendantes

Lorsque l'on augmente le nombre de variables aléatoires, l'étude d'une variable par rapport aux autres change sensiblement.

DÉFINITION 49 (Indépendance mutuelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_r$ des variables aléatoires discrètes de Ω vers $\mathbb{R}$.

On dit que $X_1, \dots, X_r$ sont **mutuellement indépendantes** si, pour tout $(x_1, \dots, x_r) \in \prod_{i=1}^r X_i(\Omega)$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

DÉFINITION 50

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes.

On dit que $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires **indépendantes** si pour tout $k \in \mathbb{N}$ les v.a. $Y_1, \dots, Y_k$ sont mutuellement indépendante.

REMARQUE 51 — Si $X_1, \dots, X_r$ sont mutuellement indépendantes alors pour tous $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tels que $i \neq j$ les v.a. X_i et X_j sont indépendantes. L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.

La réciproque est fausse.

Ainsi, en général, on ne cherchera pas à prouver que des v.a. sont mutuellement indépendantes car cela est trop lourd en vérifications (à la place l'énoncé le supposera).

THÉORÈME 52 (Lemme des coalitions)

Soient $r \geq 2$, $p \in \{1, \dots, r-1\}$ et $X_1, \dots, X_r$ des variables discrètes mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soient $f : \prod_{i=1}^p X_i(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \prod_{i=p+1}^r X_i(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_r)$ sont indépendantes.

En particulier, $\mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_p)g(X_{p+1}, \dots, X_r)) = \mathbb{E}(f(X_1, \dots, X_p))\mathbb{E}(g(X_{p+1}, \dots, X_r))$.

EXEMPLE 53 — On lance quatre dés de façon indépendante. Pour $i \in \{1, \dots, 4\}$, on note D_i le résultat du dé numéro i .

Les variables aléatoires $D_1, \dots, D_4$ sont donc mutuellement indépendantes.

Les variables aléatoires $S = D_1 + D_2$ et $M = \max(D_3, D_4)$ sont donc indépendantes d'après le lemme des coalitions.

Par contre, on ne sait rien entre $D_1 + D_2$ et $D_1 \times D_3$ sont indépendantes, car les deux v.a. sont créées en utilisant D_1 . Il faudra dans ce cas étudier la loi jointe de ces deux v.a. pour voir si oui ou non elles sont indépendantes.

EXEMPLE 54 — Voici un contre-exemple d'indépendance non mutuelle. On lance deux pièces équilibrées indépendantes. Soit X la v.a. qui vaut 1 si la première pièce donne Pile et 0 sinon, Y celle qui vaut 1 si la seconde pièce donne Pile et 0 sinon, et Z celle qui vaut 1 si les deux pièces ont le même résultat et 0 sinon.

Les quatre résultats (P, P), (P, F), (F, P), (F, F) ont chacun probabilité $1/4$. Les v.a. X, Y, Z prennent respectivement les valeurs (1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), et (0, 0, 1).

On remarque que chacune des trois variables vaut 0 avec probabilité $1/2$ et 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Pour le couple (X, Z) , il prend chaque valeur (1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 0) avec probabilité $\frac{1}{4}$. Comme $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$, on en déduit que X et Z sont deux v.a. de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ indépendantes.

On vérifie de même que Y et Z sont deux v.a. de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ indépendantes. L'indépendance de X et Y vient de l'énoncé (lancers indépendants).

Cependant, on a $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1, Z = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(Z = 1)$. Donc X, Y, Z ne sont pas mutuellement indépendantes.

L'étude couple par couple ne suffit pas pour décrire le triplet (X, Y, Z) .

PROPOSITION 55

Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ et $X_1, \dots, X_r$ des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si elles admettent une espérance, alors

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^r a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^r a_i \mathbb{E}(X_i).$$

Si, de plus, elles sont mutuellement indépendantes et admettent des variances, alors

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^r a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^r a_i^2 \text{Var}(X_i).$$

EXEMPLE 56 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On considère des v.a. $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on a $\mathbb{E}(X_k) = p$ et $\text{Var}(X_k) = p(1-p)$.

On obtient donc $\mathbb{E}(S) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n p = np$ et $\text{Var}(S) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = np(1-p)$.

6 Complément : Indicatrices d'événements

Plusieurs exemples de ce chapitre ont associé la valeur 1 à la réalisation d'un événement et 0 sinon. On définit proprement cette notion.

Elle permet notamment de transformer un problème de comptage en un calcul d'espérance.

DÉFINITION 57 (Indicatrice d'un événement (HP))

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$ un événement.

On définit l'**indicatrice** de A , notée $\mathbf{1}_A$, par $\mathbf{1}_A : \omega \in \Omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$

C'est une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A), \quad V(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)).$$

REMARQUE 58 — L'indicatrice est une variable aléatoire, alors que $\mathbb{P}(A)$ est un nombre. La valeur de $\mathbf{1}_A$ dépend du ω choisi.

Cette définition convient aussi aux ensembles $A = \emptyset$ et à $A = \Omega$: les indicatrices correspondantes sont constantes, égales à 0 et à 1.

PROPOSITION 59 (Opérations sur les événements)

Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On a :

$$\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A, \quad \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}.$$

De plus,

$$\text{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

EXEMPLE 60 — On lance un dé équilibré à six faces. On note A l'événement « le résultat est pair » et B l'événement « le résultat est au moins 4 ». Ainsi $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{4, 5, 6\}$. Posons $X = \mathbf{1}_A$, $Y = \mathbf{1}_B$ et $S = X + Y$. La variable S compte combien de ces deux événements sont réalisés.

Si le résultat est 1 ou 3, aucun des deux événements n'est réalisé et S vaut 0. Si le résultat est 2 ou 5, un seul des deux est réalisé et S vaut 1. Enfin, pour 4 ou 6, les deux événements sont réalisés et S vaut 2. L'équiprobabilité des six résultats donne

$$\mathbb{P}(S = 0) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(S = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(S = 2) = \frac{1}{3}.$$

La linéarité de l'espérance permet aussi de calculer directement

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

On a $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/6 = 1/3$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 1/4$. Ainsi,

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \quad \text{Var}(S) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$$

On peut aussi retrouver cette valeur à partir de la loi de S : $\mathbb{E}(S^2) = 0^2/3 + 1^2/3 + 2^2/3 = 5/3$, donc $\text{Var}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2 = 5/3 - 1^2 = 2/3$.

PROPOSITION 61 (Compter à l'aide d'indicatrices)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. Le nombre N d'événements réalisés parmi $A_1, \dots, A_n$ est la variable aléatoire $N = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$.

On a $\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

Si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors $\text{Var}(N) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)(1 - \mathbb{P}(A_i))$.

EXEMPLE 62 — Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules bleues. On tire successivement de façon uniforme 3 boules sans remise et l'on note N le nombre de boules rouges obtenues. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit A_i l'événement « la boule du tirage numéro i est rouge ». On a donc $N = \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2} + \mathbf{1}_{A_3}$.

Les tirages étant uniformes et les boules indistinguables, chaque boule a individuellement la même probabilité d'occuper une place donnée parmi les trois tirages. Il y a 4 boules rouges sur 10, ce qui veut dire que pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on a $\mathbb{P}(A_i) = 4/10$.

On obtient donc : $\mathbb{E}(N) = 3 \times \frac{4}{10} = \frac{6}{5}$. Les tirages sans remise sont par contre dépendants. Il faudra donc repasser par un calcul de loi pour obtenir $\text{Var}(N)$ (calculer $\mathbb{P}(N=0)$, $\mathbb{P}(N=1)$, $\mathbb{P}(N=2)$, $\mathbb{P}(N=3)$).

EXERCICE 4 — On lance un dé équilibré. On note A l'événement « obtenir un résultat au plus 3 » et B l'événement « obtenir un résultat impair ». Calculer $\text{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

7 Complément : Absence de mémoire géométrique

La loi géométrique décrit le rang du premier succès lors d'une répétition de pile ou face indépendants ayant tous la même probabilité de succès. L'indépendance entre les lancers implique que le résultat d'un lancer ne dépend pas des lancers précédents.

PROPOSITION 63 (**Absence de mémoire géométrique**)

Soient $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}_{[X > n]}(X > n + m) = \mathbb{P}(X > m) = (1 - p)^m$.

Cette propriété est appelée **absence de mémoire**.

Réciproquement, toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n) > 0$;
- $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}_{[X > n]}(X > n + m) = \mathbb{P}(X > m)$;

est une v.a. de loi géométrique de paramètre $p = \mathbb{P}(X = 1)$ avec $p \in]0, 1[$.

REMARQUE 64 — On exclut les paramètres $p = 0$ et $p = 1$ car sinon on a $\mathbb{P}(X > n) = 0$ pour $n \geq 1$ dans ces deux cas, ce qui empêche de faire du conditionnement.

EXEMPLE 65 — On effectue des essais indépendants dont la probabilité de succès vaut $1/4$, et on affecte à X le rang du premier succès. On a alors :

$$\mathbb{P}_{[X > 5]}(X > 8) = \mathbb{P}(X > 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

EXERCICE 5 — Une variable X suit la loi $\mathcal{G}(1/3)$ sur $\mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}_{[X > 4]}(X \geq 7)$, $\mathbb{P}_{[X \geq 4]}(X \geq 7)$ et $\mathbb{P}_{[X > 4]}(X \leq 6)$. Décrire ces deux événements à l'aide de probabilités non conditionnelles.

8 Complément : Fonctions génératrices

Parmi les variables aléatoires discrètes, on retrouve très souvent des v.a. X telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Cette propriété permet de caractériser X d'une autre façon, particulièrement utile pour étudier une somme de variables indépendantes.

8.1 Définition et lecture de la loi

DÉFINITION 66 (Fonction génératrice (HP))

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

On définit la **fonction génératrice** comme

$$G_X : t \in [-1, 1] \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k.$$

De par les propriétés sur la famille $(\mathbb{P}(X = k))_{k \geq 0}$, le théorème de comparaison implique que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = k)t^k$ est absolument convergente (donc convergente) pour tout $t \in [-1, 1]$.

Si $X(\Omega) \subset \{0, \dots, N\}$ pour un $N \in \mathbb{N}$, on a alors $G_X(t) = \sum_{k=0}^N p_k t^k$, et la fonction G_X est polynômiale.

PROPOSITION 67

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

REMARQUE 68 — La fonction G_X peut parfois être définie au-delà de $[-1, 1]$. C'est le cas par exemple si X est une v.a. d'image finie. Mais cela est faux en général.

Par exemple, si X est une v.a. de loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ alors G_X sera bien définie sur $] -2, 2[$. Mais c'est l'existence sur $[-1, 1]$ qui nous intéresse.

PROPOSITION 69 (Retrouver les probabilités)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit $G_X : t \mapsto \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k)t^k$ sa fonction génératrice. Alors, on a :

- $G_X(1) = 1$ et $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$
- La fonction G_X est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $G_X^{(k)}(0) = \mathbb{P}(X = k)k!$.
- Soit Y une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. X et Y ont la même loi ssi $G_X = G_Y$ sur $] -1, 1[$.

REMARQUE 70 — La fonction génératrice G_X est polynômiale ssi X est finie. Sinon G_X est une fonction qu'il n'est pas forcément facile d'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

EXEMPLE 71 — Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est $G_X : t \mapsto \frac{1+2t+3t^2}{6}$. G_X est polynômiale de degré 2, donc X est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. Les coefficients de G_X fournissent directement dans ce cas la loi de X : $\mathbb{P}(X = 0) = 1/6$, $\mathbb{P}(X = 1) = 2/6 = 1/3$, $\mathbb{P}(X = 2) = 3/6 = 1/2$.

On retrouve par dérivation $G'_X(t) = (2 + 6t)/6$ et $G''_X(t) = 1$. Ainsi $G'_X(0) = 1/3$ et $G''_X(0)/2! = 1/2$. Pour une fonction polynomiale déjà développée, lire directement les coefficients est le calcul le plus court.

EXEMPLE 72 — Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est $G_X : t \mapsto \frac{1+2t+3t^2}{6}$. G_X est polynômiale de degré 2, donc X est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. Les coefficients de G_X fournissent directement dans ce cas la loi de X : $\mathbb{P}(X = 0) = 1/6$, $\mathbb{P}(X = 1) = 2/6 = 1/3$, $\mathbb{P}(X = 2) = 3/6 = 1/2$.

On retrouve par dérivation $G'_X(t) = (2 + 6t)/6$ et $G''_X(t) = 1$. Ainsi $G'_X(0) = 1/3$ et $G''_X(0)/2! = 1/2$. Pour une fonction polynomiale, développer la fonction et lire directement les coefficients est le calcul le plus court.

8.2 Calculer les moments

PROPOSITION 73 (**Moments et fonction génératrice**)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G_X .

- Si X admet une espérance finie, alors $G'_X(t) \rightarrow_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{E}(X)$.
- Si X admet une variance, alors $G''_X(t) \rightarrow_{t \rightarrow 1^-} \mathbb{E}(X(X-1))$.
Dans ce cas, $\text{Var}(X) = \lim_{t \rightarrow 1^-} G''_X(t) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$.

REMARQUE 74 — Dans le cas où les limites de G'_X et G''_X existent en 1, on les notera $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

Cela fournit $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\text{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

C'est notamment le cas lorsque G_X est un polynôme, mais ce n'est pas le cas en général. Il faut d'abord vérifier les hypothèses d'existence d'espérance ou de variance (ou de limite pour G'_X, G''_X) avant d'écrire les relations de la proposition.

La dérivée seconde de G_X fournit l'espérance $X(X-1)$ et non celle de X^2 . Cela se remarque bien en dérivant terme à terme à l'intérieur de la somme de la série, mais la justification de ce calcul (dérivation de séries entières) dépasse le programme d'ECG.

EXEMPLE 75 — Reprenons $G_X(t) = (1 + 2t + 3t^2)/6$. La variable X prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, donc elle possède des moments de tout ordre. Avec les calculs précédents on obtient $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{2+6}{6} = \frac{4}{3}$, $\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1) = 1$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1) = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$ et $\text{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \frac{7}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$.

8.3 Fonctions génératrices usuelles

PROPOSITION 76

Soit X une variable aléatoire.

- Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, alors $G_X = t \mapsto 1 - p + pt$.
- Si X suit $\mathcal{B}(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, alors $G_X = t \mapsto (1 - p + pt)^n$.
- Si X suit $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}^*$, avec $p \in]0, 1[$, alors $G_X = t \mapsto \frac{pt}{1-(1-p)t}$.
Pour $p = 1$, la variable X est constante égale à 1 et $G_X = t \mapsto t$.
- Si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$, alors $G_X = t \mapsto e^{\lambda(t-1)}$.

EXEMPLE 77 — Soient $p \in]0, 1[$ et X de loi $\mathcal{G}(p)$ sur $\mathbb{N}^*$. Pour $t \in [-1, 1]$ on a $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$. Puisque $p \in]0, 1[$ on a $q = 1 - p \in]0, 1[$, et donc G_X est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{q}\}$ avec $\frac{1}{q} > 1$.

La fonction G_X est ainsi deux fois dérivable en 1, donc la fonction X possède une espérance et une variance (un moment d'ordre 1 et un moment d'ordre 2, et même en réalité des moments à tout ordre n).

La dérivation fournit : $G'_X(t) = \frac{p}{(1-qt)^2}$ et $G''_X(t) = \frac{2pq}{(1-qt)^3}$.

Comme $1 - q = p$, on obtient $G'_X(1) = 1/p$ et $G''_X(1) = 2q/p^2$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

On retrouve les résultats usuels pour une v.a. de loi géométrique. On peut de même calculer les moments d'ordre supérieur de X avec les dérivées successives de G_X (cela est hors programme du HP).

EXERCICE 6 — Soit X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Calculer $G_X(t)$ pour $t \in [-1, 1]$, puis vérifier que l'on obtient bien les formules $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\text{V}(X) = \lambda$.

8.4 Somme de variables indépendantes

PROPOSITION 78 (Produit de fonctions génératrices)

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Si X et Y sont indépendantes, alors on a :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_{X_1+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t).$$

EXEMPLE 79 — On effectue deux Pile ou Face indépendants dont les probabilités de succès sont respectivement $1/3$ et $1/2$. Soient X et Y les variables aléatoires associées à chaque Pile ou Face, et soit $S = X + Y$.

On a donc $G_X = t \mapsto \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t$ et $G_Y : t \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$.

Comme X et Y sont indépendantes, on a donc $G_S = G_X G_Y$. Pour $t \in [-1, 1]$, cela donne :

$$G_S(t) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2.$$

On lit donc $\mathbb{P}(S=0) = 1/3$, $\mathbb{P}(S=1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(S=2) = 1/6$. En dérivant ce polynôme, on obtient

$$G'_S(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}t, \quad G''_S(t) = \frac{1}{3}.$$

On en déduit $\mathbb{E}(S) = 5/6$, puis

$$\text{Var}(S) = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}.$$

REMARQUE 80 — Ce résultat, comme d'autres, n'est vrai qu'à condition que les v.a. soient indépendantes.

Et, la réciproque est fausse. On peut avoir $G_{X+Y} = G_X G_Y$ sans que X et Y soient indépendantes.

EXERCICE 7 — Une variable X prend les valeurs 0, 1 et 2 avec les probabilités $1/4$, $1/2$ et $1/4$. Écrire G_X , puis déterminer la loi de $X+Y$ lorsque Y est indépendante de X et possède la même loi.

Bilan du contenu nécessaire à maîtriser :

- Définition de la loi jointe de deux variables aléatoires discrètes X, Y .
Savoir réciproquement qu'une famille $(p_{i,j})_{i,j}$ définit une loi jointe si tous les $p_{i,j}$ sont entre $[0, 1]$ et si leur somme (éventuellement somme de série) vaut 1.
- Lois marginales : $\mathbb{P}(X = x) = \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ et $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_x \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.
Dans un tableau, cela revient à calculer les sommes des lignes et des colonnes.
- Définition de la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ (si $\mathbb{P}(Y = y) > 0$).
- Définition de l'indépendance entre deux v.a. Savoir montrer que deux v.a. X et Y sont indépendantes.
- Savoir déterminer la loi de $g(X, Y)$: calcul de $\mathbb{P}(g(X, Y) = z)$.
- Pour deux variables à valeurs entières X, Y , on a $\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = k - i)$.
Savoir déterminer les bornes précises de la somme. S'il y a indépendance le terme $\mathbb{P}(X = i, Y = k - i)$ se simplifie.
- Savoir déterminer la loi d'un maximum ou d'un minimum via la fonction de répartition.
Si X, Y sont indépendantes, $\mathbb{P}(\max(X, Y) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t)\mathbb{P}(Y \leq t)$ et $\mathbb{P}(\min(X, Y) > t) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t)$. Pour une v.a. à valeurs entières Z , $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k - 1)$.
- Théorème de transfert : $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x,y} g(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ (si la série converge absolument). La convergence est automatique si X et Y prennent un nombre fini de valeurs.
- Propriétés de l'espérance.
- Définition de la covariance, propriétés de la covariance.
- Propriétés de la variance.
- Définition du coefficient de corrélation de X, Y : $\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y)/(\sigma(X)\sigma(Y))$.
Il appartient à $[-1, 1]$; sa valeur absolue vaut 1 ssi X, Y sont liées par une relation affine avec probabilité 1.
- Si X, Y sont indépendantes et admettent des moments d'ordre 2, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse.
- Définition d'une famille de v.a. mutuellement indépendantes.
Lemme des coalitions. Pour des v.a. indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de variances finies et des réels a_i , $\text{Var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{V}(X_i)$.
- Lois de sommes de v.a. indépendantes usuelles : si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$; si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
- Définition des indicatrices d'événements. Propriétés : $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ et $\text{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
Une somme d'indicatrices compte le nombre d'événements réalisés.
- Absence de mémoire des lois géométriques : si $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$, alors $\mathbb{P}_{[X > n]}(X > n + m) = (1 - p)^m$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.
- Définition de la fonction génératrice. Propriétés : lire la loi de X dans les coefficients de G_X .
Savoir retrouver les moments de X avec $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\text{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.
Si X et Y sont indépendantes alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.