

FEUILLE DE TD N° 3

Couples de variables aléatoires discrètes

Les variables aléatoires d'un même exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

■ *Lois conjointes et conditionnelles*

Exercice 1. Soit (X, Y) un couple de v.a. de loi jointe suivante :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/8	1/8	1/4
1	1/4	1/8	1/8

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi jointe de probabilités
2. Déterminer les lois de X et de Y .
3. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(X + Y = 2)$ et $\mathbb{P}(XY = 0)$.
4. Déterminer la loi de Y sachant $[X = 1]$.

Exercice 2. Une urne contient trois boules rouges et deux bleues. On tire deux boules sans remise. On note X la v.a. qui vaut 1 si la première boule tirée est rouge, et 0 sinon. Et Y la v.a. qui vaut 1 si la seconde boule tirée est rouge et 0 sinon.

1. Préciser les valeurs possibles pour X et Y . Calculer $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$
2. Calculer de même les trois autres cas, puis construire le tableau de la loi jointe.
3. Retrouver les lois marginales.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. Soient $a \in [0, 1]$ et X, Y des v.a. à valeurs dans $\{0, 1\}$, avec $\mathbb{P}(X = 1) = 0,4$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 0,6$ et $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = a$.

1. Exprimer toutes les valeurs la loi jointe en fonction de a .
2. Quelles sont les valeurs possibles de a ?

3. Pour quelle valeur de a les variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 4. Soient X, Y des v.a. indépendantes de lois de Bernoulli de paramètres respectifs $1/3$ et $1/2$.

1. Donner leur loi jointe.
2. Déterminer la loi de $X + Y$. Est-ce une loi binomiale ?
3. Déterminer la loi de XY .

Exercice 5. On lance deux dés équilibrés et indépendants. On définit X via le résultat du premier dé, et Y par le minimum des deux résultats.

1. Déterminer les valeurs possibles du couple (X, Y) .
2. Calculer $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ suivant les positions relatives de $i, j \in \{1, \dots, 6\}$.
3. En déduire la loi de Y , puis la loi de X sachant $[Y = 4]$.

■ *Applications supplémentaires*

Exercice 6. Soient X, Y deux variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1/6$, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 1/3$, $\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 1/6$ et $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 1/3$, les autres probabilités étant nulles. On pose $S = X + Y$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$, puis $\mathbb{E}(S)$.
2. Donner les valeurs possibles de S .
3. Calculer la loi de S , puis retrouver son espérance.

Exercice 7. Soit X uniforme sur $\{1, 2, 3\}$ et $Y = 4 - X$.

1. Construire le tableau de la loi jointe de X et Y .
2. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.
4. Y est-elle indépendante de X ?

Exercice 8. Soient X, Y des v.a. indépendantes de lois $\mathcal{B}(4, 1/3)$ et $\mathcal{B}(6, 1/3)$. On pose $S = X + Y$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\text{Var}(S)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$ et $\mathbb{P}(S = 2)$.
3. Si Y suit désormais une loi $\mathcal{B}(6, 1/2)$ et reste indépendante de X , peut-on encore calculer l'espérance et la variance de S ?

Exercice 9. Deux variables aléatoires X et Y ont pour variances 4 et 9, et leur covariance vaut -3 .

1. Calculer $\sigma_X, \sigma_Y, \rho(X, Y)$.
2. Calculer la variance $X + Y$ et de $X - Y$.

Exercice 10. Soit X de variance non nulle et $Y = 2X + 1$.

1. Exprimer $V(Y)$ en fonction de $V(X)$.
2. Utiliser la linéarité de la covariance pour calculer $\text{Cov}(X, Y)$, puis en déduire $\rho(X, Y)$.

Reprendre avec $Y = 1 - 2X$.

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes de même espérance m et de même variance $\sigma^2 > 0$. On pose $S_n = \sum_i X_i$ et

$$M_n = \frac{S_n}{n}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\text{Var}(S_n)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\text{Var}(M_n)$.
3. Donner l'écart-type de M_n . Quelle est sa valeur pour $n = 100$ et $\sigma = 2$?
4. Quelles étapes resteraient valables si l'indépendance n'était pas supposée ?

Exercice 12. Soient X, Y des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$, puis $\mathbb{E}(XY)$.
2. Calculer $\mathbb{E}((X - Y)^2)$. Peut-on remplacer cette espérance par $(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y))^2$?

Exercice 13. Soient X, Y des v.a. indépendantes discrètes et indépendantes. On suppose que pour tout $x \in X(\Omega)$ et pour tout $y \in \Omega$ on a $\mathbb{P}(X = x) > 0$ et $\mathbb{P}(Y = y) > 0$.

1. Montrer que la loi jointe de (X, Y) n'a aucune probabilité nulle.
2. Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $Z = g(X, Y)$.
Montrer que $Z(\Omega) = g(X(\Omega) \times Y(\Omega))$.

■ Transformer un couple

Exercice 14. Soient X, Y des v.a. indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, 4\}^2$, donner la probabilité de $(X = i, Y = j)$.
2. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
3. Déterminer la loi de $T = XY$.
4. Déterminer la loi de $D = |X - Y|$.
5. Avait-on besoin de ces calculs de lois pour calculer les espérances et/ou variances de S, T, D ?

Exercice 15. Soient X, Y des v.a. indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, avec $n \geq 2$. On pose $M = \max(X, Y)$ et $m = \min(X, Y)$.

1. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\mathbb{P}(M \leq k)$ et $\mathbb{P}(m \geq k)$. Puis calculer $\mathbb{P}(m \leq k)$.
2. Déterminer les lois de M et m .
3. Calculer $M + m$, puis en déduire $\mathbb{E}(M) + \mathbb{E}(m)$.
4. Montrer que $|X - Y| = M - m$.
5. Calculer $\mathbb{E}(M), \mathbb{E}(m)$ et $\mathbb{E}(|X - Y|)$.

Exercice 16. Soit Z une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a $\sum_{k=0}^m k\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(k \leq Z \leq m)$.

Quel raisonnement utiliser ?

2. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a $\sum_{k=1}^m \mathbb{P}(Z \geq k) \leq \sum_{k=0}^m k\mathbb{P}(Z = k) + m\mathbb{P}(Z \geq m + 1)$.

Puis que si Z est d'espérance finie, on a $\sum_{k=0}^m \mathbb{P}(Z \geq k) \leq 2\mathbb{E}(Z)$.

3. On suppose Z d'espérance finie. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z \geq k)$

converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{E}(Z)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y des v.a. discrètes et indépendantes à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. On pose $M = \max(X, Y)$ et $m = \min(X, Y)$.

4. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, calculer $\mathbb{P}(m \geq k)$ et $\mathbb{P}(M \geq k)$.

5. Les v.a. X et Y ont-elles une espérance ?

Déterminer une expression "simple" de $\mathbb{E}(M)$ et $\mathbb{E}(m)$ en fonction de probabilités associées à X et Y .

6. Montrer que $|X - Y| = M - m$.

En déduire une expression "simple" de $\mathbb{E}(|X - Y|)$ en fonction de X et de Y .

Exercice 17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y des v.a. discrètes et indépendantes à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$. On pose $Z = |X - Y|$.

1. Déterminer l'ensemble image $Z(\Omega)$.

2. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, montrer que $(X - Y = k) \cup (X - Y = -k) = (Z = k)$.

3. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Soient $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i - j = k$. Déterminer les valeurs possibles de i et exprimer j en fonction de i .

4. Soient $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i - j = -k$. Déterminer les valeurs possibles de j et exprimer i en fonction de j .

5. Exprimer $\mathbb{P}(Z = k)$ comme deux sommes de produits de probabilités de la forme $P(X = i)P(Y = j)$. On fera attention aux variables des sommes et à leurs bornes.

6. Exprimer $\mathbb{E}(Z)$ en fonction de X et de Y .

7. On prend $n = 4$, et on pose $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$.

Dresser le tableau de la loi jointe du couple (X, Y) . Regrouper les cases du tableau selon les valeurs prises par Z . Que remarque-t-on ? Retrouve-t-on la formule précédente pour $\mathbb{E}(Z)$?

Exercice 18. Soient X, Y deux v.a. indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(\min(X, Y) > n)$.

2. Reconnaître la loi de $\min(X, Y)$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Calculer $\mathbb{P}(X + Y = k)$.

4. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 19. Pendant une journée, deux services reçoivent des nombres de demandes indépendants X et Y , qui suivent les lois $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$.

1. Donner la loi du total et la probabilité qu'il vaille 4.

2. Calculer $\mathbb{P}(X = 1 \mid X + Y = 4)$.

3. (*) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X sachant $[X + Y = n]$

■ Moments et dépendance

Exercice 20. On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ à partir des lois marginales.

2. En déduire les deux variances. Calculer $\mathbb{E}(XY)$ par théorème de transfert, en indiquant les cases qui donnent une contribution non nulle.

3. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$, puis $\text{Var}(X + Y)$

4. Construire la loi de $S = X + Y$, calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathbb{E}(S^2)$, et retrouver sa variance.

Exercice 21. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, et soit $Y = X^2$.

1. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

2. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 22. Soient X, Y des v.a. indépendantes, de variances respectives 1 et 4. On pose $U = X + Y$ et $V = 2X - Y$. Calculer $\text{V}(U)$, $\text{V}(V)$ et $\text{Cov}(U, V)$. Les variables U, V sont-elles indépendantes ?

Exercice 23. Soient A, B deux événements et $I = \mathbf{1}_A$, $J = \mathbf{1}_B$ leurs indicatrices.

1. Montrer que $IJ = \mathbf{1}_{A \cap B}$. En déduire $\text{Cov}(I, J)$.
2. Montrer que I, J sont non corrélées si et seulement si A, B sont indépendants.

■ Familles et synthèses

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n lancers indépendants d'un dé équilibré. On note S le nombre de résultats égaux à 6 et T le nombre de résultats pairs.

1. Donner les lois de S, T , leurs espérances et leurs variances.
2. Écrire S et T comme sommes d'indicateurs.
3. (*) Calculer $\text{Cov}(S, T)$ en distinguant les indicateurs provenant du même lancer et celles de lancers différents.

Exercice 25. Soient $p \in [0, 1]$ et X_1, X_2, X_3, X_4 des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{B}(1, p)$.

1. Justifier l'indépendance de $X_1 + X_2$ et $X_3 X_4$.
2. Déterminer la loi de chacune de ces variables.
3. Calculer $\text{Cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$.

Exercice 26 (*). Soient X, Y des v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = c \frac{1}{(i+1)^2} 8^{-j}$, pour un $c \in \mathbb{R}_+$.

1. Déterminer la valeur de c .
2. Calculer les lois marginales du couple. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. On utilisera la σ -additivité de $\mathbb{P}$.

Exercice 27 (*). Un nombre N de clients suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Chaque client choisit indépendamment un service A avec probabilité $p \in]0, 1[$, et A sinon. On note X et Y les nombres de clients qui ont choisi chaque service.

1. Donner la loi de X sachant $[N = n]$.
2. Justifier que $(X = i, Y = j) = (N = i + j)$.
3. Calculer la loi conjointe de (X, Y) .

4. En déduire leurs lois et leur indépendance.

Exercice 28 (*). Soient $r, n, N \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq r < N$ et $1 \leq n \leq N$.

Dans une urne contenant N boules, dont r rouges, on tire n boules sans remise. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, I_k est l'indicatrice associée au k -ième tirage qui est rouge. On pose $S = \sum_{k=1}^n I_k$.

1. Justifier que $\mathbb{E}(I_k) = \frac{r}{N}$.
2. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$. Calculer $\mathbb{E}(I_i I_j)$ puis $\text{Cov}(I_i, I_j)$.
3. En déduire un calcul de $\mathbb{E}(S)$ et $V(S)$.

■ Complément : fonctions génératrices

Exercice 29 (HP). Soit X une v.a. telle que $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, et $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$.

1. Écrire sa fonction génératrice G_X , puis calculer son espérance et sa variance via G_X .
2. Soit Y une v.a. indépendante de X et de même loi. Déterminer la loi de $X + Y$ à partir de G_{X+Y} .
3. Si l'on prend maintenant $Y = X$, que se passe-t-il pour G_{X+Y} ?

Exercice 30 (EDHEC 2014, problème). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = \int_0^1 \max(x, t) dt.$$

Si X est une variable aléatoire réelle discrète, on pose $Y = g(X)$. On étudie la loi et les moments de Y pour plusieurs lois de X .

A. Étude de la transformation.

1. Pour x fixé, justifier que $t \mapsto \max(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$, puis que $g(x)$ est bien défini.
2. Calculer $g(x)$ lorsque $x \leq 0$, puis lorsque $x \geq 1$.
3. Si $0 < x < 1$, partager l'intégrale en deux au point x et montrer que $g(x) = \frac{x^2+1}{2}$. Résumer l'expression de g en distinguant les trois intervalles précédents.

B. Une loi géométrique, puis une loi finie.

4. Si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ sur $\mathbb{N}^*$, montrer que $Y = X$. Donner alors l'espérance et la variance de Y .
5. On suppose désormais que X prend les valeurs $-1, 0, 1$, avec $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$, puis les valeurs de $g(-1)$, $g(0)$ et $g(1)$.
6. Donner la loi de Y . Pour chaque valeur, écrire l'événement correspondant à l'aide de X ; deux valeurs différentes de X peuvent-elles donner la même valeur de Y ?
7. Calculer l'espérance et la variance de Y .

C. Une loi de Poisson.

8. On suppose enfin que X suit $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Déterminer les valeurs possibles de Y , puis sa loi. Justifier que la somme des probabilités obtenues vaut 1.
9. Justifier que Y possède un moment d'ordre deux fini. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ en séparant le cas $X = 0$ des cas $X \geq 1$, puis en utilisant les moments de la loi de Poisson.
10. En déduire $V(Y)$. Retrouver l'espérance de Y à l'aide de l'égalité $Y = X + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[X=0]}$.

Exercice 31 (* — EDHEC scientifique 2018, problème, partie 3). *Complément hors programme admis pour cet exercice.* Soient U une variable discrète admettant une espérance et A un événement de probabilité strictement positive. Son **espérance conditionnelle sachant A** est $\mathbb{E}(U \mid A) = \sum_{u \in U(\Omega)} u \mathbb{P}_A(U = u)$. Si $(C_1, \dots, C_r)$ est un système complet d'événements de probabilités strictement positives, la **formule de l'espérance totale** donne

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{j=1}^r \mathbb{P}(C_j) \mathbb{E}(U \mid C_j).$$

Si U est positive et si les espérances conditionnelles sont finies, cette formule justifie aussi l'existence de $\mathbb{E}(U)$.

On lance une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. Les lancers sont indépendants. Pour $i \geq 1$, on note P_i et F_i les événements « pile au lancer i » et « face au lancer i ».

Pour $k \geq 1$, T_k désigne le rang du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. Par exemple, avec les résultats face, pile, face, pile, on obtient $T_1 = 2$ et $T_2 = 5$. On admet que T_k est presque sûrement fini et possède une espérance, notée m_k .

1. Reconnaître la loi de T_1 et donner m_1 .
2. Pour $k \geq 2$, définir les événements

$$A_1 = F_1, \quad A_i = P_1 \cap \dots \cap P_{i-1} \cap F_i \quad (2 \leq i \leq k),$$

et $B = P_1 \cap \dots \cap P_k$. Expliquer leur signification et montrer qu'ils forment un système complet d'événements.

3. Calculer $\mathbb{P}(A_i)$ pour $1 \leq i \leq k$ et $\mathbb{P}(B)$. Vérifier que leur somme vaut 1.
4. Pour tout $n \geq k$, montrer que

$$\mathbb{P}_{A_1}(T_k = n) = \mathbb{P}(T_k = n - 1).$$

Interpréter cette égalité à l'aide de l'indépendance des lancers.

5. En déduire $\mathbb{E}(T_k \mid A_1) = 1 + m_k$.

6. Pour $2 \leq i \leq k$, expliquer ce qu'il reste à attendre après l'événement A_i . En déduire $\mathbb{E}(T_k \mid A_i) = i + m_k$.
7. Justifier que $\mathbb{E}(T_k \mid B) = k$. En utilisant la formule de l'espérance totale, établir

$$m_k = \sum_{i=1}^k (i + m_k) p^{i-1} q + k p^k.$$

8. Calculer $\sum_{i=1}^k p^{i-1}$, puis $\sum_{i=1}^k i p^{i-1}$ en dérivant une somme géométrique finie. En déduire

$$m_k = \frac{1 - p^k}{q p^k}.$$

9. Vérifier que la formule convient aussi à $k = 1$. Pour une pièce équilibrée, calculer m_2 et m_3 et comparer ces deux valeurs.
10. Soit S_k le rang du k -ième pile, sans exiger que les piles soient consécutifs. On admet $\mathbb{E}(S_k) = \frac{k}{p}$. Justifier $S_k \leq T_k$ puis en déduire, sans étude de fonction,

$$(k-1)p^k \geq k p^{k-1} - 1.$$

Exercice 32 (* — Oral ESCP 2019).

Complément hors programme admis pour cet exercice. Soient U une variable discrète admettant une espérance et A un événement de probabilité strictement positive. Son **espérance conditionnelle sachant A** est $\mathbb{E}(U \mid A) = \sum_{u \in U(\Omega)} u \mathbb{P}_A(U = u)$. Si $(C_1, \dots, C_r)$ est un système complet d'événements de probabilités strictement positives, la **formule de**

l'espérance totale donne

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{j=1}^r \mathbb{P}(C_j) \mathbb{E}(U \mid C_j).$$

Si U est positive et si les espérances conditionnelles sont finies, cette formule justifie aussi l'existence de $\mathbb{E}(U)$.

Les variables N et Z sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient $z_1, z_2 > 0$ distincts. La variable Z prend ces deux valeurs avec des probabilités $p_1, p_2 \in]0, 1[$, de somme 1. On suppose $\mathbb{E}(Z) = 1$ et l'on note $\rho^2 = V(Z) > 0$. Soit $\alpha > 0$. Conditionnellement à $[Z = z_i]$, la variable N suit $\mathcal{P}(\alpha z_i)$, pour $i = 1, 2$.

1. Donner $\mathbb{P}(Z = z_i, N = k)$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $k \in \mathbb{N}$, puis la loi de N par probabilités totales.
2. Montrer que N possède une espérance et calculer $\mathbb{E}(N)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(N^2 \mid Z = z_i)$. En déduire $\mathbb{E}(N^2)$, puis $V(N) = \alpha + \alpha^2 \rho^2$.
4. N peut-elle suivre une loi de Poisson ? Comparer son espérance et sa variance.
5. Calculer $\mathbb{E}(NZ)$, puis $\text{Cov}(N, Z)$. Les variables N et Z sont-elles indépendantes ?
6. Calculer $\mathbb{P}(Z = z_1 \mid N = 0)$ et expliquer pourquoi l'information $N = 0$ modifie en général la loi de Z .
7. Pour $t \in [-1, 1]$, déterminer la fonction génératrice $G_N(t)$ en conditionnant par les deux valeurs de Z . Retrouver $G_N(1)$ et $\mathbb{E}(N)$.
8. Appliquer les formules avec $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{3}{2}$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$: calculer ρ^2 , $\mathbb{E}(N)$, $V(N)$ et $\mathbb{P}(Z = \frac{1}{2} \mid N = 0)$.