

PROGRAMME DE COLLE - COLLE N° 5

■ *Espaces vectoriels* ■

- Connaître les espaces vectoriels usuels $\mathbb{R}^n$, $M_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_m[X]$, leurs opérations et leurs vecteurs nuls.
Leurs dimensions sont respectivement n , pq et $m+1$.
- Définition d'un sous-espace vectoriel. Pour une partie F d'un espace vectoriel réel E , vérifier que $0_E \in F$, puis que pour tous $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $\lambda u + \mu v \in F$.
- L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E . Ce n'est pas le cas de leur réunion en général.

- Définition d'une combinaison linéaire et de l'espace engendré par une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}.$$

- Savoir montrer qu'un vecteur appartient à un sous-espace engendré en trouvant des coefficients convenables. Pour montrer qu'il n'y appartient pas, établir que le système obtenu n'a aucune solution.

- Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de E est libre si l'égalité $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0_E$

implique $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Elle est liée s'il existe une telle relation avec au moins un coefficient non nul.

- Une famille de polynômes écheonnée en degré est une famille libre.
- Une famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Savoir obtenir une famille génératrice à partir d'une écriture paramétrique des vecteurs d'un sous-espace.
- Définition d'une base : famille libre et génératrice.
Chaque vecteur admet alors une unique décomposition dans cette base. Les coefficients, rangés dans l'ordre des vecteurs de la base, sont ses coordonnées.

- Connaître les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, de $M_{p,q}(\mathbb{R})$ et de $\mathbb{R}_m[X]$: vecteurs unités, matrices E_{ij} et famille $(1, X, \dots, X^m)$.
- Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie : nombre de vecteurs d'une base.
Si F est un sous-espace de E et $\dim E = n$, alors $\dim F \leq n$, avec égalité si et seulement si $F = E$.
- Dans un espace de dimension n , une famille libre contient au plus n vecteurs et une famille génératrice au moins n vecteurs. Une famille de n vecteurs est une base dès qu'elle est libre ou génératrice.
- Savoir extraire une base d'une famille génératrice et compléter une famille libre en une base. Savoir déterminer une base et la dimension d'un sous-espace vectoriel.
- Définition du rang d'une famille : $rg(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))$. Dans un espace de dimension n , le rang vaut p si et seulement si la famille est libre.
- Savoir écrire la matrice d'une famille en plaçant les coordonnées des vecteurs en colonnes dans une base fixée, puis calculer son rang par le pivot.
- Savoir éliminer des vecteurs d'une famille génératrice et non libre à l'aide de la méthode du Pivot.
- Définition de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$: ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$.
Connaître et savoir utiliser $X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1}$.

■ *Rappels sur les variables aléatoires* ■

- Connaître le langage des probabilités (univers, événement, probabilité).
- Définition d'une (mesure de) probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω . C'est une fonction de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0, 1]$ qui est sigma-additive. Le nombre $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de la partie A .
Propriétés des probabilités (σ -additivité, somme, complémentaire).
- (Mesure de) probabilités uniforme. Si $\mathbb{P}$ est uniforme alors $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.
- Définition d'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
La notion de "hasard" sur Ω dépend de la (mesure de) probas $\mathbb{P}$ que l'on choisit.
- Tirage dans une urne : Le tirage sans remise et le tirage simultané donnent des probabilités identiques. Le tirage avec remise est différent.
- Probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.
Formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$

Formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$.

Formule de Bayes : $\forall i \in I, \mathbb{P}(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j \geq 0} P(A|B_j)P(B_j)}$.

Savoir calculer des probabilités conditionnelles. Savoir calculer des probabilités à l'aide des probas conditionnelles.

— Événements indépendants ($\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$), définition générale pour $A_1, \dots, A_n$.

— Une variable aléatoire réelle discrète est une **fonction** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dont l'image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable, et telle que pour tout $x \in X(\Omega)$, $\{\omega \in \Omega, \text{ t.q. } X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$.

Pour $A \subset \mathbb{R}$, on pose $(X \in A) = \{\omega \in \Omega, \text{ t.q. } X(\omega) \in A\}$.

La loi de X est la liste $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Cette liste est finie ou dénombrable, selon le cardinal de $X(\Omega)$.

Calcul de probabilités : $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$.

— On dit que X a une espérance si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente. Si oui, on définit l'espérance de X via $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$. Si $X(\Omega)$ est finie, la série est une simple somme.

L'espérance $X \mapsto \mathbb{E}(X)$ est une application linéaire. Si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

L'espérance a les mêmes propriétés que l'intégrale $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$.

— Théorème de transfert : si $f(X)$ a une espérance, $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$.

— Variance de X : $Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$. Ecart-type : $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.

Propriété : $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Intérêt de l'espérance et de la variance pour étudier la v.a. X .

— Lois de v.a. usuelles : Bernouilli $\mathcal{B}(p)$, binômiale $Bin(n, p)$ (distribution, espérance, variance), uniforme sur $\{x_1, \dots, x_r\}$ ou $\{1, \dots, n\}$ (distribution, espérance), géométrique $\mathcal{G}(p)$, poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

— Variables aléatoires indépendantes, mutuellement indépendantes.

Si X et Y sont indépendantes et ont une espérance, alors $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$.

Lemme des coalitions : Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$.

— Calcul d'espérance avec les probas. conditionnelles et la formule des probabilités totales.

■ Couples de variables aléatoires ■

— Définition de la loi jointe de deux variables aléatoires discrètes X, Y .

Savoir réciproquement qu'une famille $(p_{i,j})_{i,j}$ définit une loi jointe si tous les $p_{i,j}$ sont entre $[0, 1]$ et si leur somme (éventuellement somme de série) vaut 1.

— Lois marginales : $\mathbb{P}(X = x) = \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ et $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_x \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. Dans un tableau, cela revient à calculer les sommes des lignes et des colonnes.

— Définition de la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ (si $\mathbb{P}(Y = y) > 0$).

— Définition de l'indépendance entre deux v.a. Savoir montrer que deux v.a. X et Y sont indépendantes.

— Savoir déterminer la loi de $g(X, Y)$: calcul de $\mathbb{P}(g(X, Y) = z)$.

— Théorème de transfert : $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x,y} g(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ (si la série converge absolument). La convergence est automatique si X et Y prennent un nombre fini de valeurs.

— Propriétés de l'espérance.

— Définition de la covariance, propriétés de la covariance.

— Propriétés de la variance.

Questions de cours :

1. Propriété : Pour E un e.v. de dimension n et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E ayant n vecteurs, cette famille est une base de E ssi elle est libre ssi elle est génératrice de E . Preuve de $(x_1, \dots, x_n)$ libre implique $(x_1, \dots, x_n)$ génératrice de E .

2. Définition de la matrice de passage $P_{B \rightarrow B'}$, propriétés, relation de changement de base.

3. Définition de la loi jointe d'un couple (X, Y) , et des lois marginales.

Définition de la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ (si $\mathbb{P}(Y = y) > 0$).

Propriété : $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ et $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Représentation sous forme de tableau.

4. Lois usuelles : Bernouilli, binomiale, uniforme (sur $\{1, \dots, n\}$), géométrique, Poisson. Loi, espérance, variance.

5. Espérance, variance, écart-type, covariance. Définition. Propriétés de l'espérance (linéarité, positivité, comparaison, inégalité triangulaire, espérance d'une constante) et de la variance (formule de König-Huygens, variance de aX et de $X + a$).

6. Théorème de transfert pour $g(X, Y)$.

Pour tout $z \in g(X, Y)(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(g(X, Y) = z) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \mid g(x, y) = z} \mathbb{P}(X =$

$x, Y = y)$.

Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.