

Chapitre 4

Applications linéaires

Table des matières

1	Applications linéaires	1
1.1	Définition et premiers exemples	1
1.2	Vérifier l'espace d'arrivée	1
1.3	Opérations et détermination par une base	2
2	Noyau, image et bijectivité	3
2.1	Noyau et image	3
2.2	Injectivité, surjectivité et antécédents	4
3	Dimension, rang et isomorphismes	5
4	Représentation matricielle	6
4.1	Matrice d'une application linéaire	6
4.2	Opérations sur les matrices représentatives	7
4.3	Application linéaire canoniquement associée	8
5	Changements de base	8
5.1	Changer les coordonnées d'un vecteur	8
5.2	Changement de base pour un endomorphisme	9
6	Complément : projecteurs	9
6.1	Définition	9
6.2	Construire un projecteur à partir de deux sous-espaces	10
6.3	Choisir une base adaptée	10
	Bilan du chapitre	12

1 Applications linéaires

Dans ce chapitre, nous étudions les applications linéaires définies entre deux espaces vectoriels réels (de dimension finie).

1.1 Définition et premiers exemples

DÉFINITION 1 (**Application linéaire**)

Soient E et F deux espaces vectoriels réels. Une fonction $f : E \rightarrow F$ est appelée **application linéaire** si

$$\forall u, v \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. Une application linéaire de E dans lui-même est appelée un **endomorphisme** de E . On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

PROPOSITION 2 (**Conservation des combinaisons linéaires**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors $f(0_E) = 0_F$.

De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, tous $u_1, \dots, u_p \in E$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(u_i).$$

Une application linéaire envoie vecteur nul sur vecteur nul. Et, l'image d'une combinaison linéaire par f est la combinaison linéaire des images.

EXEMPLE 3 — On pose $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y, y + z) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que f est une application linéaire. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \\ &= (x + \lambda x' + y + \lambda y', y + \lambda y' + z + \lambda z') \\ &= (x + y, y + z) + \lambda(x' + y', y' + z') \\ &= f(u) + \lambda f(v). \end{aligned}$$

Ainsi, f est une application linéaire.

EXEMPLE 4 — Considérons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x + 1 \in \mathbb{R}$. On a $g(0) = 1$, donc g n'est pas une application linéaire.

1.2 Vérifier l'espace d'arrivée

EXEMPLE 5 — On pose $D : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ avec $D : P \mapsto P'$. On veut vérifier que D est bien définie. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $P = a + bX + cX^2$. Alors $D(P) = P' = b + 2cX$, qui appartient bien à $\mathbb{R}_2[X]$. Donc D est bien définie. Et, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$D(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q' = D(P) + \lambda D(Q).$$

Ainsi, D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. En revanche, la fonction $T : P \mapsto XP$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}_3[X]$. Elle ne sera donc, dans notre cas, pas un endomorphisme.

REMARQUE 6 — Toutes les propriétés dites "linéaires" ou de "linéarité" sont en réalité associées à des applications linéaires : dérivée, intégrale, produit scalaire, espérance, somme, transposée, ... Les fonctions qui n'ont pas de telle propriété ne seront en général pas des applications linéaires ($\exp, \ln, x \mapsto \sqrt{x}$, inverse matriciel, ...).

EXEMPLE 7 — La fonction $\varphi : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^2$ est une application linéaire. Pour P, Q dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(P + \lambda Q) = (P(0) + \lambda Q(0), P(1) + \lambda Q(1)) = \varphi(P) + \lambda \varphi(Q).$$

Donc φ est bien une application linéaire.

PROPOSITION 8 (**Applications usuelles**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels et $a \in \mathbb{R}$.

La fonction nulle $x \in E \mapsto 0_F \in F$ est une application linéaire.

L'**identité** de E , $\text{Id}_E : x \in E \mapsto x \in E$, est un endomorphisme de E .

L'**homothétie** de E de rapport a , $u \in E \mapsto au \in E$, est un endomorphisme de E .

Ces applications linéaires existent sur n'importe quel espace vectoriel. Les autres applications linéaires que nous verrons seront soit construites à partir de propriétés de E soit à partir de bases.

EXERCICE 1 — Vérifier que $P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P(2) \in \mathbb{R}$ et de $M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t M \in M_n(\mathbb{R})$ sont des applications linéaires.

1.3 Opérations et détermination par une base

PROPOSITION 9 (**Opérations sur les applications linéaires**)

Soient E, F, G trois espaces vectoriels réels. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $af + bg \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $h \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

La combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire, et la composée d'applications linéaire est une application linéaire.

DÉFINITION 10 (**Puissances d'un endomorphisme**)

Soient E un espace vectoriel réel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit les puissances de f par $f^0 = \text{Id}_E$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f \circ f^k$.

En particulier, $f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k fois).

REMARQUE 11 — Il n'y a pas de multiplication chez les endomorphismes, uniquement de la composition.

EXEMPLE 12 — Pour $f : (x, y) \mapsto (x + y, y)$ et $g : (x, y) \mapsto (x, x - y)$, deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient :

$$(g \circ f)(u) = g(x + y, y) = (x + y, x), \quad (f \circ g)(u) = f(x, x - y) = (2x - y, x - y).$$

Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont différentes.

La composition n'est pas commutative en général.

THÉORÈME 13 (**Images d'une base**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de dimension finie n . On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de F .

Alors, il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = v_i$.

Pour $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $f(u) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

REMARQUE 14 — Dans le théorème, les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont quelconques. Chaque choix de n -uplet $(v_1, \dots, v_n)$ fournit une application linéaire différente.

EXEMPLE 15 — Dans $\mathbb{R}^2$, posons $u = (1, 1)$ et $v = (1, -1)$. La famille (u, v) est libre et a deux vecteurs dans un e.v. de dimension 2 : c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Il existe donc un unique endomorphisme f t.q. $f(u) = (2, 0)$ et $f(v) = (0, 4)$. Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour déterminer $f(w)$, écrivons w dans la base (u, v) :

$$w = \alpha u + \beta v \iff \begin{cases} \alpha + \beta = x, \\ \alpha - \beta = y \end{cases} \iff \alpha = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x-y}{2}.$$

La linéarité de f donne alors

$$f(x, y) = \frac{x+y}{2}(2, 0) + \frac{x-y}{2}(0, 4) = (x+y, 2x-2y).$$

On peut vérifier que $f(u) = (2, 0)$ et $f(v) = (0, 4)$.

2 Noyau, image et bijectivité

2.1 Noyau et image

DÉFINITION 16 (**Noyau et image**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

On définit le **noyau** de f , par $\text{Ker}(f) = \{u \in E \text{ t.q. } f(u) = 0_F\}$.

On définit l'**image** de f par $\text{Im}(f) = f(E)$.

PROPOSITION 17

Soient E, F deux espaces vectoriels réels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E , et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Déterminer le noyau de f revient à résoudre l'équation $f(u) = 0_F$ dans E .

On exprime ensuite les solutions comme des combinaisons linéaires, ce qui fournit une famille génératrice de $\text{Ker}(f)$.

EXEMPLE 18 — Reprenons $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a : $f(u) = (0, 0) \iff (x+y, y+z) = (0, 0) \iff x+y=0 \text{ et } y+z=0 \iff x=-y \text{ et } z=-y \iff u = (-y, y, -y) = y(-1, 1, -1)$.

Ainsi, $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((-1, 1, -1))$.

Le vecteur $(-1, 1, -1)$ est non nul, donc $((-1, 1, -1))$ est libre. C'est donc une base de $\text{Ker}(f)$, qui est ainsi de dimension 1.

EXEMPLE 19 — Reprenons $\varphi : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^2$. Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On résout :

$$\varphi(P) = (0, 0) \iff a = 0 \text{ et } a + b + c = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = -c \iff P(X) = c(X^2 - X).$$

On a donc $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(X^2 - X)$. C'est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}_2[X]$.

PROPOSITION 20 (**Obtenir une famille génératrice de l'image**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Alors, on a $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

L'image de f est le sous-espace vectoriel engendré par l'image d'une base.

REMARQUE 21 — La famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$ mais ce n'est pas forcément une base de $\text{Im}(f)$. Le théorème de construction des applications linéaires en dimension finie indique que l'on peut retrouver n'importe quel n -uplet derrière $(f(e_1), \dots, f(e_n))$, donc la famille peut être liée (càd de rang inférieur strictement à n).

EXEMPLE 22 — Pour $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z)$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $f(e_1) = (1, 0)$, $f(e_2) = (1, 1)$, $f(e_3) = (0, 1)$. Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0), (1, 1), (0, 1))$. Comme $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$, on a $\text{Vect}((1, 0), (1, 1), (0, 1)) = \text{Vect}((1, 0), (0, 1))$. Les deux vecteurs restants forment la base canonique de $\mathbb{R}^2$, d'où $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

EXEMPLE 23 — Déterminons l'image de $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y, y + z, x + 2y + z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $g((x, y, z)) = (x, 0, x) + (y, y, 2y) + (0, z, z) = x(1, 0, 1) + y(1, 1, 2) + z(0, 1, 1)$.

§ On a donc $\text{Im}(g) = \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1))$.

On constate que $(1, 1, 2) = (1, 0, 1) + (0, 1, 1)$, donc $\text{Im}(g) = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$. Les deux vecteurs engendrant $\text{Im}(g)$ ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre, donc forment une base de $\text{Im}(g)$. On a ainsi $\dim(\text{Im}(g)) = 2$.

On peut aussi montrer que $\text{Im}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = x + y\}$ mais les méthodes pour transformer une expression de sous-espace vectoriel engendré en une expression de solution d'équation ne sont pas au programme.

2.2 Injectivité, surjectivité et antécédents

DÉFINITION 24 (**Injectivité et surjectivité**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que f est **injective** si, pour tout $(u, v) \in E$, $f(u) = f(v)$ implique $u = v$. On dit que f est **surjective** si, pour tout $w \in F$, il existe $u \in E$ t.q. $f(u) = w$. On dit que f est **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective.

Si f est bijective, on parle d'**isomorphisme**.

Si f est un endomorphisme ($F = E$) bijectif, on parle d'**automorphisme**.

REMARQUE 25 — On sait déjà que f est injective ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ possède au plus une solution.

De même f est surjective ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution.

Et f est bijective ssi pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ possède exactement une solution.

PROPOSITION 26 (**Critères pour une application linéaire**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors : f est injective ssi $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$.

EXEMPLE 27 — Pour $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z)$, on a trouvé $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((-1, 1, -1))$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. f est donc surjective, mais n'est pas injective.

PROPOSITION 28 (**Résolution de $f(u) = w$**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $w \in F$.

Si $w \notin \text{Im}(f)$, l'équation $f(u) = w$ n'a pas de solution.

Si $u_0 \in E$ est une solution particulière, l'ensemble des solutions est $\{u_0 + v, v \in \text{Ker}(f)\}$.

EXERCICE 2 — Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3$. Vérifier f est injective mais n'est pas surjective.

3 Dimension, rang et isomorphismes

DÉFINITION 29 (**Rang**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On définit le **rang** de f , noté $\text{rg}(f)$, comme $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

THÉORÈME 30 (**Théorème du rang, admis**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

EXEMPLE 31 — Considérons $\varphi : P \in \mathbb{R}_2[X] \rightarrow (P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^2$. On a déjà déterminé que $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(X^2 - X)$ et qu'il est de dimension 1. Le théorème du rang donne donc $\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi)) = 3 - 1 = 2$.

Or $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$. Ainsi φ est surjective. Elle n'est pas injective cependant.

On peut aussi établir la surjectivité directement. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le polynôme $P = a + (b - a)X$ vérifie $P(0) = a$ et $P(1) = b$, donc (a, b) possède un antécédent par φ .

Le théorème du rang permet de connaître rapidement la dimension de $\text{Im}(\varphi)$ (ou de $\text{Ker}(\varphi)$), mais cela ne précise pas les vecteurs qui sont contenus dedans.

PROPOSITION 32 (**Conséquences du théorème du rang**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si f est injective, alors $\dim(E) \leq \dim(F)$.

Si f est surjective, alors $\dim(E) \geq \dim(F)$.

Si f est un isomorphisme, alors $\dim(E) = \dim(F)$.

Si $\dim(E) = \dim(F) = n$, on a les équivalences :

$$f \text{ est injective ssi } f \text{ est surjective ssi } f \text{ est bijective ssi } \text{rg}(f) = n.$$

PROPOSITION 33 (**Isomorphisme et automorphisme**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme.

Alors la bijection réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est elle aussi linéaire.

REMARQUE 34 — Les inégalités sur les dimensions sont des conditions nécessaires, mais pas suffisantes. Leur réciproque est plus souvent utilisée. Par exemple, une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ peut être injective, mais elle n'est pas surjective.

Une application linéaire de $M_2(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}^2$ peut être surjective mais ne peut pas être injective.

EXEMPLE 35 — Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2$. f est une application linéaire. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $f((x, y)) = (0, 0)$ est équivalente à $x + y = 0$ et $x - y = 0$, qui est équivalent à $x = y = 0$.

Ainsi f est injective. f est un endomorphisme, donc f est bijective (les espaces d'arrivée et de départ ont la même dimension) : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

On a donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Déterminons sa bijection réciproque. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On résout : $f((x, y)) = (a, b)$ ssi $x + y = a$ et $x - y = b$ ssi $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$.

Par conséquent, $f^{-1}((a, b)) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2})$.

PROPOSITION 36 (**Image d'une base et isomorphisme**)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de même dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et

$f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

4 Représentation matricielle

4.1 Matrice d'une application linéaire

DÉFINITION 37 (Matrice d'une application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de dimensions respectives n et p , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_p)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On définit la **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$** , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, comme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

La colonne j est la colonne des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base d'arrivée $\mathcal{C}$. Dans le cas d'un endomorphisme ($F = E$) représenté dans une même base $\mathcal{B}$ ($\mathcal{C} = \mathcal{B}$) on note la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Il faut distinguer trois étapes : prendre un vecteur de la base de départ, calculer son image par f , puis exprimer cette image dans la base d'arrivée. Les coefficients obtenus forment une colonne, et non une ligne. Le nombre de colonnes est $\dim(E)$ et le nombre de lignes est $\dim(F)$.

EXEMPLE 38 — Pour $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (x + y, y + z) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$, les images des vecteurs de la base canonique sont $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$. Posons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On obtient ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

EXEMPLE 39 — Soit $D : P \in \mathbb{R}_2[X] \rightarrow P' \in \mathbb{R}_2[X]$, et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. On calcule : $D(1) = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$, $D(X) = 1$, $D(X^2) = 2X$. On a ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EXEMPLE 40 — Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. On utilise comme bases $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$, avec $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, -1)$, et $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$, avec $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (1, 1)$. Ce sont deux familles de vecteurs non-colinéaires, donc elles sont libres. Et comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ ce sont bien des bases de $\mathbb{R}^2$.

On calcule : $f(u_1) = (3, 3)$ et $f(u_2) = (1, -1)$. Ces deux couples sont exprimés dans la base canonique. Il faut donc procéder à un changement de base, de la base canonique vers la base $\mathcal{C}$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathcal{C}$. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule

l'inverse de P , en tant qu'inverse de matrice 2×2 : $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice

des coordonnées de $f(u_1)$ dans la base $\mathcal{C}$ est donc $P^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, et celle des coordonnées de $f(u_2)$

dans la base $\mathcal{C}$ est donc $P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 41 (Liens entre matrice et application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels réels de dimensions n, p , $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ des bases de E, F , $f \in \mathcal{L}(E, F)$

et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$. Soient $x \in E$, $y \in F$, X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, Y la matrice colonne des coordonnées de y dans $\mathcal{C}$.

Alors, on a $f(x) = y$ ssi $AX = Y$.

De plus, $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$, où $\text{rg}(A)$ est le rang de la famille des colonnes de A .

REMARQUE 42 — Résoudre l'équation $AX = 0$ donne les coordonnées, dans la base $\mathcal{B}$, des vecteurs du noyau de f . Si $\mathcal{B}$ n'est pas la base canonique, il reste à traduire ces coordonnées en vecteurs de E . De même, les colonnes de A représentent les images de $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base $\mathcal{C}$.

EXEMPLE 43 — Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = {}^t(x, y, z)$. On résout $AX = 0$ avec la méthode du Pivot.

On obtient $AX = 0$ ssi $X = z^t(-1, -1, 1)$.

Ainsi, on a $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((-1, -1, 1))$ et $\dim \text{Ker}(f) = 1$. Comme l'espace de départ est $\mathbb{R}^3$, le théorème du rang donne $\text{rg}(f) = 3 - 1 = 2$.

Mais on connaissait déjà le rang de f , puisque $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$, et qu'en résolvant $AX = 0$ on détermine aussi le rang de A (nombre de lignes non-nulles une fois le système échelonné).

Pour les colonnes de A , on a $C_3 = C_1 + C_2$, donc on a $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$.

Ainsi $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}((1, 0, 1), (2, 1, 3))$.

4.2 Opérations sur les matrices représentatives

PROPOSITION 44 (Composition et produit matriciel)

Soient E, F, G trois espaces vectoriels réels de dimension finie, munis de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $h \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$.
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(h \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(h) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$.

EXEMPLE 45 — Pour $f : (x, y) \mapsto (x + y, y)$ et $h : (x, y) \mapsto (x, x - y)$, leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice de $h \circ f$ dans la base canonique est donc $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En revanche, $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de $f \circ h$ dans la base canonique. Ce résultat fait le lien entre non-commutativité du produit matriciel et non-commutativité de la composition d'applications linéaires.

EXEMPLE 46 — Prenons maintenant $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y, y + z) \in \mathbb{R}^2$ et $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a - 2b) \in \mathbb{R}$, $g(a, b) = a - 2b$. Leurs matrices dans les bases canoniques sont $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$.

La matrice de $g \circ f$ dans les bases canoniques est donc $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. On a ainsi $g \circ f : (x, y, z) \mapsto x - y - 2z$. En revanche, la composée $f \circ g$ n'est pas possible. Le produit AB n'est pas défini non plus, car A a trois colonnes alors que B n'a qu'une ligne. Vérifier les espaces de départ et d'arrivée, puis les tailles des matrices, permet donc aussi de vérifier l'ordre du produit.

PROPOSITION 47 (Puissances d'applications linéaires)

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E , $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$.

Et, f est un automorphisme si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible. Dans ce cas, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.

EXERCICE 3 — Pour la dérivation D sur $\mathbb{R}_2[X]$, calculer $D^2(P)$ et $D^3(P)$ pour $P = a + bX + cX^2$. Retrouver ces résultats en élevant au carré puis au cube la matrice de D dans la base $(1, X, X^2)$.

EXEMPLE 48 — Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'endomorphisme $f : P \mapsto P + P'$. Soit $\mathcal{B}$ la base

canonique de f . On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour trouver l'antécédent d'un polynôme quelconque

$Q = a + bX + cX^2$, on pose $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. On teste l'inversibilité de $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ par la méthode du Pivot.

On obtient que A est inversible, et en poursuivant le calcul on obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, f est bijective (c'est un automorphisme). On a donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$, et la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.3 Application linéaire canoniquement associée

DÉFINITION 49

Soient $n, p \geq 1$. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice n lignes, p colonnes.

On peut alors définir la fonction : $u_A : X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \mapsto A \times X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

La fonction u_A est une application linéaire $M_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

On l'appelle **application linéaire canoniquement associée à A** .

Pour B_1, B_2 les bases canoniques de $M_{p,1}(\mathbb{R})$ et $M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\text{Mat}_{B_1, B_2}(u_A) = A$.

Autrement dit, on peut aussi créer une application linéaire en choisissant une matrice.

D'une part toute application linéaire u est associée à une matrice $\text{Mat}_{B_1, B_2}(u)$ par un choix de bases.

D'autre part toute matrice A est associée à une application linéaire u_A .

5 Changements de base

5.1 Changer les coordonnées d'un vecteur

PROPOSITION 50 (Matrice de passage)

Soient E un espace vectoriel réel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

On a $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(Id_E)$.

5.2 Changement de base pour un endomorphisme

THÉORÈME 51 (Formule de changement de base)

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E . Posons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$. Alors

$$A' = P^{-1}AP, \quad A = PA'P^{-1}.$$

EXEMPLE 52 — Considérons $f(x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y)$, de matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Prenons $u = (1, 1)$, $v = (1, -1)$ et la base $\mathcal{B}' = (u, v)$. On calcule $f(u) = (3, 3) = 3u$ et

$f(v) = (1, -1) = v$. Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc, pour P la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}'$, on a $A' = P^{-1}AP$.

DÉFINITION 53 (Matrices semblables)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices A et B sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $B = P^{-1}AP$.

Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme f mais vu dans deux bases différentes. Cela implique par exemple que deux matrices semblables ont le même rang.

PROPOSITION 54

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible t.q. $B = P^{-1}AP$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B^k = P^{-1}A^kP, \quad A^k = PB^kP^{-1}.$$

6 Complément : projecteurs

6.1 Définition

DÉFINITION 55 (Projecteur (HP))

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est un **projecteur** lorsque $p \circ p = p$.

Pour $n = \dim(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de p dans une base de E , p est un projecteur ssi $A^2 = A$.

REMARQUE 56 — Une fois que l'on a appliqué un projecteur à un vecteur, lui appliquer de nouveau ce projecteur ne change plus le résultat.

L'endomorphisme nul et l'identité de E sont deux exemples de projecteurs.

PROPOSITION 57 (Image, noyau et décomposition)

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors $\text{Im}(p) = \{u \in E \text{ t.q. } p(u) = u\} = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0_E\}$.

Tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = v + w$, avec $v \in \text{Im}(p)$ et $w \in \text{Ker}(p)$.

Ces deux vecteurs sont $v = p(u)$ et $w = u - p(u)$.

On dit que p est le **projecteur sur** $\text{Im}(p)$ **parallèlement à** $\text{Ker}(p)$.

EXEMPLE 58 — Considérons l'application linéaire $p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y, 0) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $p(p((x, y))) = p((x - y, 0)) = (x - y, 0) = p(x, y)$.

Ainsi, p est un projecteur. Déterminons son image et son noyau.

On a $p((x, y)) = (0, 0)$ ssi $x - y = 0$. Par conséquent, $\text{Ker}(p) = \{(y, y) \text{ t.q. } y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1))$.
 Et on a $p((x, y)) = (x, y)$ ssi $x - y = x$ et $y = 0$ ssi $y = 0$ ssi $(x, y) = (x, 0)$. Ainsi, $\text{Im}(p) = \{(a, 0) \text{ t.q. } a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0))$.

Le projecteur p est donc le projecteur sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite d'équation $y = x$. La décomposition d'un couple quelconque s'écrit

$$(x, y) = \underbrace{(x - y, 0)}_{\in \text{Im}(p)} + \underbrace{(y, y)}_{\in \text{Ker}(p)}.$$

6.2 Construire un projecteur à partir de deux sous-espaces

PROPOSITION 59 (Construction (HP))

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E . On suppose que tout vecteur $u \in E$ s'écrit de manière unique $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.

La fonction $p : E \rightarrow E$ qui, à un tel vecteur $u = v + w$, associe v est un projecteur.

Son image est F et son noyau est G . On l'appelle le **projecteur sur F parallèlement à G** .

EXEMPLE 60 — Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $F = \text{Vect}(1)$ et $G = \text{Vect}(X, X^2)$. Tout polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$ s'écrit de façon unique $P(X) = a + (bX + cX^2)$, avec $a \in F$ et $bX + cX^2 \in G$, par unicité des coefficients d'un polynôme. Le projecteur sur F parallèlement à G est alors $p : a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto a \in \mathbb{R}_2[X]$.

On reconnaît que $p = P \mapsto P(0)$. Son image est l'ensemble des polynômes constants et son noyau est l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ qui s'annulent en 0.

6.3 Choisir une base adaptée

PROPOSITION 61 (Matrice d'un projecteur)

Soient E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de rang r . Une base $(u_1, \dots, u_r)$ de $\text{Im}(p)$ complétée d'une base $(v_1, \dots, v_{n-r})$ de $\text{Ker}(p)$ forme une base $\mathcal{B}$ de E . Dans cette base, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r \text{ fois}}).$$

Pour $r = 0$, cette matrice est la matrice nulle ; pour $r = n$, c'est la matrice identité.

EXEMPLE 62 — Reprenons $p(x, y) = (x - y, 0)$. On a trouvé $\text{Im}(p) = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 0)$ et $\text{Ker}(p) = \text{Vect}(v)$ avec $v = (1, 1)$. Donc $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Soient A est la matrice de p dans la base canonique et P la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$. On a : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $D = P^{-1}AP$.

La matrice diagonale D décrit donc la même application que A , dans une autre base. Elle rend immédiatement visibles les vecteurs conservés et les vecteurs envoyés sur le vecteur nul.

REMARQUE 63 — Dans le chapitre sur la diagonalisation, cette propriété permettra de dire que la matrice d'un projecteur est diagonalisable. Les seules valeurs propres possibles seront 0 et 1 ; elles sont toutes les deux présentes si le projecteur n'est ni nul ni égal à l'identité.

EXERCICE 4 — On définit $q : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x, 0, z) \in \mathbb{R}^3$ par $q(x, y, z) = (x, 0, z)$. Vérifier que q est un projecteur, puis déterminer une base de son image et une base de son noyau.

EXERCICE 5 — Soit p un projecteur d'un espace vectoriel réel E de dimension finie. On pose $q = \text{Id}_E - p$. Vérifier que q est un projecteur et que $p \circ q = q \circ p = 0$. Retrouver ensuite $\text{Im}(q) = \text{Ker}(p)$ et $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p)$ en utilisant la décomposition associée à p .

Bilan du contenu nécessaire à maîtriser :

- Définition d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels réels E et F . Savoir montrer qu'une fonction est une application linéaire.
- Une application linéaire $f : E \rightarrow F$ vérifie $f(0_E) = 0_F$ et est stable par combinaison linéaires : $f(\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(u_i)$. Les images des vecteurs d'une base de E déterminent f .
- Définitions d'un endomorphisme, d'un isomorphisme et d'un automorphisme.
- Définition du noyau d'une application linéaire : $\text{Ker}(f) = \{u \in E \text{ t.q. } f(u) = 0_F\}$.
C'est un sous-espace vectoriel de E . On a f injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Savoir déterminer le noyau d'une application linéaire : résoudre l'équation $f(u) = 0_F$, paramétrer les solutions, puis en déduire une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- Définition de l'image d'une application linéaire $\text{Im}(f) = f(E) = \{w \in F \text{ t.q. } \exists u \in E, f(u) = w\}$.
C'est un sous-espace vectoriel de F . On a f surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $f : E \rightarrow F$ est linéaire, alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Savoir extraire une base de cette famille génératrice pour déterminer l'image de f .
- Savoir résoudre $f(u) = w$ pour un vecteur $w \in F$. Il n'y a aucune solution si $w \notin \text{Im}(f)$. Pour u_0 tel que $f(u_0) = w$, les solutions sont de la forme $u_0 + v$ avec $v \in \text{Ker}(f)$.
- Définition du rang d'une application linéaire : $\text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f)$.
Connaître le théorème du rang, lorsque E est de dimension finie : $\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \text{rg}(f)$.
- Si $\dim E = \dim F = n$ et $f : E \rightarrow F$ est linéaire, alors injectivité, surjectivité, bijectivité et rang maximal ($\text{rg}(f) = n$) sont équivalentes.
Savoir utiliser ces équivalences pour raccourcir les calculs.
- Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$.
La colonne C_j contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Elle possède $\dim F$ lignes et $\dim E$ colonnes. De plus, $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$.
- Savoir passer de l'application linéaire à sa matrice dans des bases et réciproquement. Si X est la colonne des coordonnées de u dans la base de départ et Y celle de v dans la base d'arrivée, alors $f(u) = v$ ssi $Y = AX$.
- Connaître les propriétés sur les matrices d'applications linéaires.
Le produit matriciel correspond entre autres à la composée d'applications linéaires.
- Pour un endomorphisme f , on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^k$.
Si f est bijectif, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$.
- Changement de base pour les endomorphismes : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P$.
- Définition de deux matrices semblables : $B = P^{-1} A P$ avec P inversible.
Elles ont le même rang et vérifient $A^k = P B^k P^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (HP) Reconnaître un projecteur p par $p^2 = p$. On a alors $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et la décomposition unique sur $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$: $u = p(u) + (u - p(u))$ pour tout $u \in E$.
- (HP) Construire le projecteur sur un sous-espace parallèlement à un autre à partir d'une décomposition unique. Choisir une base de l'image suivie d'une base du noyau pour obtenir la matrice $\text{diag}(I_r, 0)$, où $r = \text{rg}(p)$.