

PROGRAMME DE COLLE - COLLE N° 6

■ *Rappels sur les variables aléatoires* ■

- Connaître le langage des probabilités (univers, événement, probabilité).
- Définition d'une (mesure de) probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω . C'est une fonction de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0, 1]$ qui est sigma-additive. Le nombre $\mathbb{P}(A)$ est la probabilité de la partie A .
Propriétés des probabilités (σ -additivité, somme, complémentaire).
- (Mesure de) probabilités uniforme. Si $\mathbb{P}$ est uniforme alors $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.
- Définition d'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
La notion de "hasard" sur Ω dépend de la (mesure de) probas $\mathbb{P}$ que l'on choisit.
- Tirage dans une urne : Le tirage sans remise et le tirage simultané donnent des probabilités identiques. Le tirage avec remise est différent.
- Probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.
Formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$
Formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$.
Formule de Bayes : $\forall i \in I, \mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}$.
Savoir calculer des probabilités conditionnelles. Savoir calculer des probabilités à l'aide des probas conditionnelles.
- Événements indépendants ($\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$), définition générale pour $A_1, \dots, A_n$.
- Une variable aléatoire réelle discrète est une **fonction** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dont l'image $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable, et telle que pour tout $x \in X(\Omega)$, $\{\omega \in \Omega, \text{ t.q. } X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$.
Pour $A \subset \mathbb{R}$, on pose $\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega, \text{ t.q. } X(\omega) \in A\}$.

La loi de X est la liste $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Cette liste est finie ou dénombrable, selon le cardinal de $X(\Omega)$.

Calcul de probabilités : $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$.

- On dit que X a une espérance si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente. Si oui, on définit l'espérance de X via $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$. Si $X(\Omega)$ est finie, la série est une simple somme.
L'espérance $X \mapsto \mathbb{E}(X)$ est une application linéaire. Si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
L'espérance a les mêmes propriétés que l'intégrale $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$.
- Théorème de transfert : si $f(X)$ a une espérance, $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$.
- Variance de X : $\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$. Ecart-type : $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$.
Propriété : $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
Intérêt de l'espérance et de la variance pour étudier la v.a. X .
- Lois de v.a. usuelles : Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, binômiale $\text{Bin}(n, p)$ (distribution, espérance, variance), uniforme sur $\{x_1, \dots, x_r\}$ ou $\{1, \dots, n\}$ (distribution, espérance), géométrique $\mathcal{G}(p)$, poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
- Variables aléatoires indépendantes, mutuellement indépendantes.
Si X et Y sont indépendantes et ont une espérance, alors $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$.
Lemme des coalitions : Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$.
- Calcul d'espérance avec les probas. conditionnelles et la formule des probabilités totales.

■ *Couples de variables aléatoires* ■

- Définition de la loi jointe de deux variables aléatoires discrètes X, Y .
Savoir réciproquement qu'une famille $(p_{i,j})_{i,j}$ définit une loi jointe si tous les $p_{i,j}$ sont entre $[0, 1]$ et si leur somme (éventuellement somme de série) vaut 1.
- Lois marginales : $\mathbb{P}(X = x) = \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ et $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_x \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. Dans un tableau, cela revient à calculer les sommes des lignes et des colonnes.
- Définition de la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ (si $\mathbb{P}(Y = y) > 0$).

- Définition de l'indépendance entre deux v.a. Savoir montrer que deux v.a. X et Y sont indépendantes.
- Savoir déterminer la loi de $g(X, Y)$: calcul de $\mathbb{P}(g(X, Y) = z)$.
- Pour deux variables à valeurs entières X, Y , on a $\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = k - i)$. Savoir déterminer les bornes précises de la somme. S'il y a indépendance le terme $\mathbb{P}(X = i, Y = k - i)$ se simplifie.
- Savoir déterminer la loi d'un maximum ou d'un minimum via la fonction de répartition.
Si X, Y sont indépendantes, $\mathbb{P}(\max(X, Y) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t)\mathbb{P}(Y \leq t)$ et $\mathbb{P}(\min(X, Y) > t) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t)$. Pour une v.a. à valeurs entières Z , $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k - 1)$.
- Théorème de transfert : $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x,y} g(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ (si la série converge absolument). La convergence est automatique si X et Y prennent un nombre fini de valeurs.
- Propriétés de l'espérance.
- Définition de la covariance, propriétés de la covariance.
- Propriétés de la variance.
- Définition du coefficient de corrélation de X, Y : $\rho(X, Y) = \text{Cov}(X, Y)/(\sigma(X)\sigma(Y))$.
Il appartient à $[-1, 1]$; sa valeur absolue vaut 1 ssi X, Y sont liées par une relation affine avec probabilité 1.
- Si X, Y sont indépendantes et admettent des moments d'ordre 2, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse.
- Définition d'une famille de v.a. mutuellement indépendantes.
Lemme des coalitions. Pour des v.a. indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de variances finies et des réels a_i , $\text{Var}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i)$.
- Lois de sommes de v.a. indépendantes usuelles : si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.
- Définition des indicatrices d'événements. Propriétés : $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ et $\text{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
Une somme d'indicatrices compte le nombre d'événements réalisés.

Questions de cours :

1. Définition du coefficient de corrélation linéaire $\rho(X, Y)$. Propriétés.
Définition des v.a. mutuellement indépendantes. Conséquences : lemme des coalitions, variance de la somme, somme de deux v.a. binomiales.
2. Propriétés pour le calcul de loi de $X + Y, \max(X, Y), \min(X, Y)$: Expression de $\mathbb{P}(X + Y = t), \mathbb{P}(\max(X, Y) \leq t), \mathbb{P}(\min(X, Y) \geq t)$.
Cas où X, Y sont à valeurs dans $\mathbb{P}$: simplification des expressions, et calcul de $\mathbb{P}(\max(X, Y) = k), \mathbb{P}(\min(X, Y) = k)$.
Cas où X et Y sont indépendantes : simplification.
3. Définition de la loi jointe d'un couple (X, Y) , et des lois marginales.
Définition de la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ (si $\mathbb{P}(Y = y) > 0$).
Propriété : $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ et $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.
Représentation sous forme de tableau.
4. Lois usuelles : Bernoulli, binomiale, uniforme (sur $\{1, \dots, n\}$), géométrique, Poisson. Loi, espérance, variance.
5. Espérance, variance, écart-type, covariance. Définition. Propriétés de l'espérance (linéarité, positivité, comparaison, inégalité triangulaire, espérance d'une constante), de la variance (formule de König-Huygens, variance de aX , de $X + a$ et de $X + Y$), et de la covariance (simplification, symétrie, bilinéarité).
6. Théorème de transfert pour $g(X, Y)$.
Pour tout $z \in g(X, Y)(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(g(X, Y) = z) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) : g(x,y)=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$.
Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.