MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques appliquées – informatique de la classe d'ECG 1ère année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, sciences sociales...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif de ce programme est de permettre de façon équilibrée :

— une formation par les mathématiques : une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthése, ...) ;

— l'acquisition d'outils utiles notamment en sciences sociales et en économie (probabilités statistiques, optimisation) ;

— une culture sur les enjeux actuels et sur les techniques afférentes de l'informatique en lien avec des problématiques issues des sciences sociales ou économiques et l'acquisition mesurée de la démarche algorithmique pour résoudre un problème ou simuler une situation non triviale en lien avec la pratique d'un langage de programmation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'intérêt et l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales vise en particulier à à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques ou informatiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique ou une démarche algorithmique.

3 Architecture des programmes

Le niveau de référence à l'entrée de la filière EC est celui du cours de mathématiques complémentaires de la classe de terminale. Le programme de mathématiques appliquées s'inscrit dans le même esprit, résolument tourné vers l'utilisation d'outils mathématiques et informatiques pour résoudre des problématiques concrètes, tout en maintenant un apprentissage mathématique solide et rigoureux. On privilégie autant que possible les références aux autres disciplines pour motiver l'introduction d'outils mathématiques ou informatiques et en souligner l'efficacité.

Il est indispensable que chaque enseignant ait une bonne connaissance des programmes du cours de spécialité mathématiques de la classe de première et du cours de mathématiques complémentaires de terminale, afin que ses approches pédagogiques ne soient pas en rupture avec l'enseignement qu'auront reçu les étudiants.

Le programme s'organise autour de points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- L'algèbre linéaire est abordé par le biais du calcul : systèmes d'équations linéaires, calcul matriciel. Les espaces vectoriels présentés sont tous équipés d'une base naturelle. L'espace vectoriel, comme objet abstrait, n'est pas au programme.
- La théorie des graphes est un outil de modélisation très utilisé. Elle permet de mettre en œuvre le calcul matriciel et de le mettre en situation sur des algorithmes.
- L'analyse vise à mettre en place les méthodes courantes de travail sur les suites et les fonctions et permet de développer la rigueur. On s'attache principalement à développer l'aspect opératoire. On n'insiste donc ni sur les questions trop fines ou spécialisées ni sur les exemples pathologiques. On évite les situations conduisant à une trop grande technicité calculatoire.
  L'étude des séries va permettre l'étude des variables aléatoires discrètes. Celle des intégrales généralisées n'est pas au programme de la première année. Il est à noter que, dans ce programme, les comparaisons des suites, séries et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalents ne seront traitées qu'en seconde année.
- Les équations différentielles sont présentées dans le cadre d'études de phénomènes d'évolution en temps continu, adossées si possible à leur version discrète en termes de suites. On met en avant les aspects mathématiques de la notion d'équilibre.
- Les probabilités s'inscrivent dans la continuité de la formation initiée dès la classe de troisième et poursuivie jusqu'en terminale.
  On considèrera des espaces probabilisés finis au premier semestre, plus généraux au second semestre.
- L'algorithmique s'inscrit naturellement dans la démarche de résolution de problèmes. Les activités de programmation qui en résultent constituent un aspect essentiel de l'apprentissage de l'informatique. Des exemples ou des exercices d'application sont choisis pour leur intérêt dans les autres disciplines ou pour leur importance stratégique (l'analyse de données).

L'utilisation du langage Python est enseigné tout au long de l'année en lien direct avec le programme. Cette pratique régulière permettra aux étudiants de visualiser concrètement les résultats obtenus grâce aux concepts et outils mathématiques enseignés et de construire ou de reconnaître des algorithmes relevant par exemple l'analyse de graphes, de la simulation de lois de probabilité, de la recherche de valeurs approchées en analyse, du traitement de calculs matriciels en algèbre linéaire.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. Les probabilités permettent en particulier d'utiliser certains résultats d'analyse (suites, séries, intégrales, ...) et d'algèbre linéaire et justifient l'introduction du vocabulaire ensembliste.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres de volume sensiblement équivalent. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Dans le contenu du premier semestre, figurent les notions nécessaires et les objets de base qui serviront d'appui à la suite du cours. Ces éléments sont accessibles à tous les étudiants quelles que soient les pratiques antérieures et potentiellement variables de leurs lycées d'origine, et la spécialité choisie en classe de terminale. Ces contenus vont, d'une part, permettre une approche plus approfondie et rigoureuse de concepts déjà présents mais peu explicités en classe de terminale, et d'autre part, mettre en place certaines notions et techniques de calcul et de raisonnement fondamentales pour la suite du cursus.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme admis, la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les créneaux horaires dédiés à l'informatique sont consacrés au programme d'informatique. L'objectif est, en continuité avec les apprentissages du lycée, de permettre aux étudiants d'acquérir les bases de la démarche algorithmique, puis une mise en œuvre tournée vers la résolution de problèmes ainsi que l'illustration ou la modélisation de situations concrètes en lien avec les problématiques des sciences économiques et sociales. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les notions de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU PREMIER SEMESTRE

I - Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Ce chapitre présente des points de vocabulaire, des notations, ainsi que certains types de raisonnement (par l'absurde, par contraposée, par récurrence...) et de démonstrations (d'implications, d'équivalences, d'inclusions...) dont la maîtrise s'avère indispensable à une argumentation rigoureuse sur le plan mathématique.

Le contenu de ce chapitre ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique. Les notions seront introduites progressivement au cours du semestre en utilisant celles déjà acquises au lycée, et à l'aide d'exemples variés issus des différents chapitres étudiés, pourront être renforcées au-delà, en fonction de leur utilité.

1 - Eléments de logique

Les étudiants doivent savoir :

• utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » ;

• utiliser à bon escient les quantificateurs universel et existentiel ; repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;

Notations : $\exists$, $\forall$.
Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs à des fins d'abréviation est exclu.

• distinguer dans le cas d'une proposition conditionnelle la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;

• utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;

• formuler la négation d'une proposition ;

• utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;

• reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

2 - Raisonnement par récurrence

Apprentissage et emploi du raisonnement par récurrence.

On commence par le mettre en œuvre sur des exemples élémentaires. Tout exposé théorique sur le raisonnement par récurrence est exclu.

Notations $\sum$, $\prod$.	Illustration par manipulation de sommes et de produits. $\boxed{\blacktriangleright}$ Formules donnant : $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Les étudiants doivent savoir employer les notations $\sum_{i=1}^{n} u_i$ et $\sum_{\alpha \in A} u_\alpha$ où A désigne un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$ ou de $\mathbf{N}^2$.

3 - Ensembles, applications

L'objectif de cette section est d'acquérir ou de consolider le vocabulaire élémentaire sur les ensembles et les applications, mais tout exposé théorique est exclu.

a) Ensembles, parties d'un ensemble

Ensemble, élément, appartenance. Sous-ensemble (ou partie), inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Réunion. Intersection.	On fera le lien entre les opérations ensemblistes et les connecteurs logiques usuels (« et », « ou »).
Complémentaire. Complémentaire d'une union et d'une intersection.	Le complémentaire d'une partie A de E est noté $\bar{A}$.
Produit cartésien.	On introduira les notations $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Applications

Définition.	
Composition. Injection, surjection, bijection, application réciproque.	Ces notions seront introduites sur des exemples simples, toute manipulation trop complexe étant exclue. La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme.
Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	On pourra donner des exemples issus du cours d'analyse.

II - Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires

L'objectif de cette partie du programme est :
– d'une part d'initier au calcul matriciel afin de permettre la résolution de problèmes issus, notamment, des probabilités ;
– d'autre part de parvenir à une bonne maîtrise de la résolution des systèmes linéaires et de les interpréter sous forme matricielle.
L'étude de ce chapitre sera menée en lien avec l'informatique. $\boxed{\blacktriangleright}$
On introduit la problématique des systèmes linéaires, puis on présente l'utilité de l'écriture matricielle en utilisant des exemples simples de tableaux entrée-sortie ou des tableaux de Leontieff.

Tout développement théorique est hors programme.

1 - Systèmes linéaires

Définition d'un système linéaire.	
Système homogène, système de Cramer.	
Résolution par la méthode du pivot de Gauss.	La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On donnera des exemples où il existe une solution unique, où il n'existe pas de solution et où il existe plusieurs solutions.
Ensemble des solutions d'un système linéaire.	On insiste sur les propriétés de stabilité de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène en vue de l'introduction de la notion de sous-espace vectoriel au second semestre

2 - Calcul matriciel

a) Définitions

Définition d'une matrice réelle à n lignes et p colonnes. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Matrices colonnes, matrices lignes. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Matrices triangulaires, diagonales. Matrice identité.	
Transposée d'une matrice. Matrices symétriques.	Notation ${}^tA$. On caractérisera les matrices symétriques à l'aide de la transposée.

b) Opérations matricielles

Somme, produit par un nombre réel, produit. Propriétés des opérations. Transposée d'une somme, d'un produit de matrices carrées.	On pourra faire le lien entre le produit AB et le produit de A avec les colonnes de B. $\boxed{\blacktriangleright}$
Opérations sur les matrices carrées ; puissances.	Exemples de calcul des puissances n-èmes d'une matrice carrée ; application à l'étude de suites réelles satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants. $\boxed{\blacktriangleright}$ La formule du binôme n'est pas un attendu du programme du premier semestre.
Matrices inversibles. Inverse d'un produit.	On admettra que pour une matrice carrée, un inverse gauche ou droit est l'inverse.

Écriture matricielle $AX = Y$ d'un système linéaire. Unicité de la solution lorsque la matrice A est inversible.	On pourra illustrer sur des exemples la recherche de l'inverse d'une matrice A par résolution du système $AX = Y$. Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Exemples d'utilisation d'un polynôme annulateur pour déterminer l'inverse.
Déterminant d'une matrice $(2, 2)$.	Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée d'ordre 2.

III - **Théorie des graphes**

Un graphe fini est un outil simple et efficace de modélisation. Les graphes sont utilisés en sciences sociales pour la modélisation des réseaux sociaux et en économie pour des modèles d'évolution. On introduit des exemples importants comme le graphe du web ou ceux de différents réseaux sociaux en indiquant dans la mesure du possible la taille. Un graphe est peut être représenté par sa matrice d'adjacence et le calcul matriciel en permet une analyse qui peut s'interpréter concrètement. Cette analyse est choisie en première approche $\boxed{\blacktriangleright}$.

Graphes, sommets, sommets adjacents, arêtes.	Un graphe peut être orienté ou non.
Matrice d'adjacence.	La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. On donne des exemples (graphe eulérien, graphe complet,...) avec leurs matrices.
Chaîne (chemin). Longueur d'une chaîne (d'un chemin). Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G, le $(i, j)-$ème coefficient de la matrice A^d est le nombre de chemins de longueur d du sommet i au sommet j.	
Graphe connexe.	Si A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G à n sommets, A est connexe si et seulement si la matrice $I_n + A + \cdots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.
Degré d'un sommet.	Formule d'Euler (dite des poignées de main).
Analyse des réseaux sociaux	On introduira sur des exemples simples quelques mesures utilisées dans l'analyse de réseaux sociaux et leur interprétation (recherche d'influenceurs...) comme le degré de centralité ou le degré d'intermédiarité de chaque sommet. Ces notions ne sont pas exigibles.

IV - **Suites de nombres réels**

L'étude des suites numériques au premier semestre permet aux étudiants de consolider la notion de suite réelle et de convergence abordée en classe terminale. Tout exposé trop théorique sur ces notions est à exclure.
Cette première approche des suites élargit la conception de la notion de fonction.
Les calculs d'intérêts, d'amortissement ou de multiplicateurs keynesiens peuvent les mettre en situation.
L'étude des suites classiques pourra être motivée puis se faire en lien étroit avec la partie probabilités

pour mettre en avant l'utilité de cet outil numérique.
On utilisera autant que possible la représentation graphique des suites pour illustrer ou conjecturer leur comportement, en particulier pour illustrer la notion de convergence. ▶

1 - Généralités sur les suites réelles

Définitions, notations.
Exemples de définitions : par formules récursives ou explicites, par restriction d'une fonction de variable réelle aux entiers.

2 - Suites usuelles : formes explicites

Suite arithmétique, suite géométrique.	Formule donnant $\sum_{k=0}^{n} q^k$. Calculs de sommes portant sur les suites arithmétiques et géométriques.
Suite arithmético-géométrique.	Les étudiants devront savoir se ramener au cas d'une suite géométrique.
Suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2.	On se limitera au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles. ▶

3 - Convergence d'une suite réelle

Aucune démonstration concernant les résultats de cette section n'est exigible.

Limite d'une suite, suites convergentes.	$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ, élément de $\mathbf{R}$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient les termes u_n pour tous les indices n, hormis un nombre fini d'entre eux.
Généralisation aux limites infinies. Unicité de la limite.	
Opérations algébriques sur les suites convergentes. Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.	Aucune technicité sur ces opérations ne sera exigée.
Existence d'une limite par encadrement. Suites monotones.	
Théorème de la limite monotone.	Toute suite croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge. Toute suite croissante (respectivement décroissante) non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) .
Suites adjacentes.	Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.
Si les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers une même limite ℓ, la suite (u_n) converge vers ℓ.	

4 - Comportement asymptotique des suites usuelles

Croissances comparées.	Comparaison des suites (n^a), (q^n), $((\ln(n))^b)$. Résultats admis.

V - Fonctions réelles d'une variable réelle

Il s'agit, dans ce chapitre, de fournir aux étudiants un ensemble de connaissances de référence sur les fonctions usuelles et quelques théorèmes sur les fonctions d'une variable réelle. On utilisera autant que possible la représentation graphique des fonctions pour illustrer ou conjecturer ces résultats, qui prennent tout leur sens dans une synthèse récapitulative.
Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles et à celles qui s'en déduisent de façon simple. On se restreindra aux fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$. *Les fonctions trigonométriques sont hors programme.*
L'analyse reposant largement sur la pratique des inégalités, on s'assurera que celle-ci est acquise à l'occasion d'exercices.

Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

1 - Compléments sur les fonctions usuelles

a) Fonctions polynômes

La construction des polynômes formels n'est pas au programme. On confond un polynôme avec sa fonction polynomiale.

Degré, somme et produit de polynômes.	Par convention, $\deg 0 = -\infty$.
Ensemble $\mathbf{R}[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$, ensembles $\mathbf{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ de degré au plus n.	
Racines d'un polynôme. Factorisation par $(x-a)$ dans un polynôme ayant a comme racine.	Application : un polynôme de $\mathbf{R}_n[x]$ admettant plus de $n+1$ racines distinctes est nul. Pratique, sur des exemples, de la division euclidienne. $\boxed{\blacktriangleright}$
Trinômes du second degré.	Discriminant d'un trinôme du second degré. Factorisation dans le cas de racines réelles. Lorsqu'il n'y a pas de racine réelle, le signe du trinôme reste constant sur $\mathbf{R}$. Relation entre les coefficients du polynôme et la somme et le produit des racines. Relation entre les signes des coefficients du polynôme et les signes de ses racines.

b) Fonction racine carrée, fonction inverse, fonctions puissances $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}^{\alpha}$

Définitions ; notations, propriétés, représentations graphiques.	On fera une étude détaillée des fonctions puissances. Les étudiants doivent connaître les règles de calcul sur les puissances.

c) Fonction valeur absolue

Définition. Propriétés, représentation graphique.

Lien avec la distance sur $\mathbf{R}$.
On insistera sur la fonction valeur absolue.

d) Fonction partie entière

Définition. Représentation graphique.

Notation $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.
La notation E est réservée à l'espérance mathématique.

e) Fonctions logarithme et exponentielle

Rappel des propriétés. Positions relatives des courbes représentatives de $\ln, \exp, x \longmapsto x$.

Par le biais d'exercices, étude de fonctions du type $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$.

2 - Limite et continuité d'une fonction en un point

Définition de la limite d'une fonction en un point et de la continuité d'une fonction en un point.
Unicité de la limite.
Limite à gauche, limite à droite. Extension au cas où la fonction est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

Extension de la notion de limite en $\pm\infty$ et aux cas des limites infinies.

On adoptera la définition suivante : f étant une fonction définie sur un intervalle I, x_0 étant un réel élément de I ou une extrémité de I, et ℓ un élément de $\mathbf{R}$, on dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout élément x de $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$; dans ce cas, lorsque x_0 appartient à I, cela signifie que f est continue au point x_0 et, dans le cas contraire, que f se prolonge en une fonction continue au point x_0.

Opérations algébriques sur les limites.
Compatibilité du passage à la limite avec les relations d'ordre.
Existence d'une limite par encadrement.
Limite d'une fonction composée.
Si f est une fonction définie sur un intervalle I admettant une limite ℓ en un point x_0, et si (u_n) est une suite d'éléments de I convergeant vers x_0, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Études asymptotiques des fonctions exponentielle et logarithme.

Comparaison des fonctions exponentielle, puissance et logarithme au voisinage de $+\infty$ et des fonctions puissance et logarithme au voisinage de 0.

Croissances comparées

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \ln(x)^b$, $\lim\limits_{x\to 0} x^a |\ln(x)|^b$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |x|^a \mathrm{e}^{bx}$.

Les notions d'équivalence et de négligeabilité ne seront abordées qu'en deuxième année.

3 - Étude globale des fonctions d'une variable sur un intervalle

On insistera sur les représentations graphiques. On s'appuiera sur les fonctions de référence pour illustrer les notions de cette section.

Fonctions paires, impaires.	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	
Fonctions monotones.	
Théorème de la limite monotone.	Toute fonction monotone sur $]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ admet des limites finies à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$. Comportement en a et b.
Fonctions continues sur un intervalle. Opérations algébriques, composition.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Résultat admis.
L'image d'un intervalle (respectivement un segment) par une fonction continue est un intervalle (respectivement un segment).	Notations : $\max\limits_{t\in[a,b]} f(t)$ et $\min\limits_{t\in[a,b]} f(t)$. On illustrera ces résultats par des représentations graphiques et on montrera comment les mettre en évidence sur un tableau de variations.
Théorème de la bijection.	Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.
Continuité et sens de variation de la fonction réciproque.	On utilisera ces résultats pour l'étude des équations du type $f(x) = k$.
Représentation graphique de la fonction réciproque.	En liaison avec l'algorithmique, méthode de dichotomie. ▶.

4 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle. Régionnements du plan

Il s'agit de revenir et d'utiliser les notions du paragraphe d'analyse en les illustrant sur des exemples. On pourra utiliser quelques exemples issus du cours de micro-économie (modèle de l'équilibre entre offre et demande, économies d'échelle...) ▶

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Etude locale, variations, monotonie ou convexité.
Positions relatives de deux courbes.	On pourra utiliser des exemples issus du cours de micro-économie, comme la loi de l'offre et la demande, et donner des interprétations de déplacement des courbes.
Représentations graphiques dans le plan de l'ensemble des solutions d'une inéquation du type $y > f(x)$ ou $y \geqslant f(x)$.	Exemples de régionnements.

VI - **Probabilités et stastistiques**

1 - Stastistiques univariées

a) Généralités

La plupart des notions abordées dans ce paragraphe ont été abordées les années précédentes. Il s'agira ici d'encourager les étudiants à choisir les représentations graphiques et les indicateurs étudiés pour leur pertinence et de travailler leur esprit critique. L'enseignement de ce chapitre doit impérativement avoir lieu en lien étroit avec l'informatique afin de manipuler des données réelles issues du domaine de l'économie ou des sciences sociales. ▶

Introduction.	On introduira brièvement le chapitre en expliquant les rôles des différentes étapes d'une étude statistique : statistique descriptive, statistique inférentielle.
Population, individu, échantillon, variable statistique. Variable quantitative discrète, continue, variable qualitative.	Il s'agit ici d'introduire le vocabulaire adapté pour l'étude d'une série statistique.
Série statistique associée à un échantillon.	Série statistique de taille n portant sur un caractère. n-uplet des observations.

b) Etude d'une variable quantitative discrète

Dans cette section, les séries statistiques étudiées seront des séries quantitatives discrètes.

Description d'une série statistique discrète : effectifs, fréquences, fréquences cumulées.	Diagramme des fréquences cumulées.
Fonction de répartition et quantiles.	Boîte à moustaches. (on pourra comparer des échantillons grâce au résumé de leurs séries statistiques).
Indicateurs de tendance centrale : moyenne $\bar{x}$ et médiane d'une série statistique. Définitions et propriétés de la moyenne et de la médiane.	Propriétés de la moyenne et la médiane par transformation affine.
Caractéristiques de dispersion : étendue, écart interquartile. Variance s_x^2 et écart-type s_x d'une série statistique : définitions et propriétés. Formule de Koenig.	On discutera selon les données étudiées de la pertinence des différents indicateurs choisis. Pour un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ on définit la variance empirique par : $s_x^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

2 - Événements

Expérience aléatoire. Univers Ω des résultats observables.	On dégagera ces concepts à partir de l'étude de quelques situations simples où l'univers Ω des résultats possibles est fini, et où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements.

Événements, événements élémentaires, opérations sur les événements, événements incompatibles.	On fera le lien entre ces opérations sur les événement et les connecteurs logiques.
Système complet d'événements fini.	Une famille $(A_i)_{i \in I}$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, est un système complet si elle vérifie les deux conditions suivantes : • $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ • $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \Omega$.

3 - Coefficients binomiaux

Factorielle, notation $n!$.	Interprétation de $n!$ en tant que nombre de bijections d'ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments $\boxed{\blacktriangleright\ .}$
Coefficients binomiaux, notation $\binom{n}{p}$.	Nombre de chemins d'un arbre réalisant p succès pour n répétitions.
Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.	Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
Formule du triangle de Pascal.	La formule de Pascal fournit un algorithme de calcul efficace pour le calcul numérique des coefficients binomiaux. $\boxed{\blacktriangleright}$
$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.	On pourra démontrer cette formule par récurrence à partir de la formule du triangle de Pascal.

4 - Probabilité

Définition d'une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.	On restreint, la notion de probabilité à une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant : • pour tous A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ • $P(\Omega) = 1$. Cas de l'équiprobabilité.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	Généralisation à la réunion de 3 événements.

5 - Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle.	Notation P_A.
Formule des probabilités composées.	• Si $P(A) \neq 0,\ P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$. • Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Formule des probabilités totales	Si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements fini, alors pour tout événement B : $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)$. Si de plus, pour tout i $(1\leqslant i\leqslant n)$, $P(A_i)\neq 0$, on a : $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$.
Formule de Bayes.	On donnera de nombreux exemples d'utilisation de ces formules.

6 - Indépendance en probabilité

Indépendance de deux événements.	Si $P(A)\neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B)=P(B)$.
Indépendance mutuelle de n événements ($n\in\mathbf{N}^*$). Si n événements A_i sont mutuellement indépendants, il en est de même pour les événements B_i, avec $B_i=A_i$ ou $\overline{A_i}$.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU SECOND SEMESTRE

I - L'espace $\mathbf{R}^n$, sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Ce chapitre ne doit pas donner lieu à un exposé théorique ; on donne ici une approche concrète à des notions. Pour simplifier ce premier contact, l'étude se limitera à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, en privilégiant les exemples pour $n\in\{2,3,4\}$.

a) Espace $\mathbf{R}^n$

Définition de $\mathbf{R}^n$. Loi interne $+:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$. Loi externe $\cdot:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$. Propriétés d'associativité et de distributivité. Combinaisons linéaires.	On privilégiera le travail sur les espaces $\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^4$. On introduira un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ comme matrice des coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{R}^n$ dans la base canonique.
Base canonique de $\mathbf{R}^n$.	Les espaces vectoriels ci-dessus sont naturellement équipés de leur base canonique.

b) Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$.	Un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs. On remarque qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ est stable par combinaisons linéaires. On classifiera les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel.	On reviendra sur l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à $2, 3, 4$ inconnues.
Sous-espace vectoriel engendré.	Notation $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	
Base d'un sous-espace vectoriel.	$(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base du sous-espace vectoriel F de E si et seulement si tout vecteur de F se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
Si un sous-espace vectoriel admet une base constituée de p vecteurs, toute autre base a p vecteurs. Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.	Théorème admis.
Famille libre d'un sous-espace vectoriel de dimension n. Résultats admis.	Cardinal d'une famille libre (respectivement génératrice) d'un sous-espace vectoriel de dimension n.
Une famille libre (respectivement génératrice) à n vecteurs d'un sous-espace vectoriel de dimension n est une base.	Résultats admis.
Rang d'une famille de vecteurs.	

c) Applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$.

Noyau.	Le noyau d'une matrice est un sous-espace vectoriel.
Rang d'une matrice.	Le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$.	Résultat admis.
Etude de l'application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ définie par une matrice M.	$(X \to MX)$
Composition.	Produit matriciel.
Noyau et image d'une application linéaire.	
Théorème du rang.	Résultat admis.

II - Calcul différentiel et intégral

Le but de ce chapitre est de mettre en place les méthodes courantes de travail sur les fonctions. Aucune démonstration concernant les résultats de ce chapitre n'est exigible.

1 - Calcul différentiel

a) Dérivation

Dérivée en un point. Tangente au graphe en un point. Dérivée à gauche, à droite.	Notation $f'(x)$. $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$. On fera le lien entre cette formule et l'équation de la tangente au point x. Limites des taux d'accroissement de la fonction exponentielle, de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ et des fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée.	Notation f'.
Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions puissances. Dérivée des fonctions composées.	On évitera tout excès de technicité dans les calculs de dérivées.
Inégalités des accroissements finis.	Si $\lvert f'\rvert \leqslant k$ sur un intervalle I, alors : $\forall (a,b) \in I^2, \quad \lvert f(b) - f(a)\rvert \leqslant k\lvert b-a\rvert$. Application, sur des exemples, à l'étude de suites récurrentes du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $\lvert f'\rvert \leqslant k < 1$. ▶ Tout exposé théorique sur les suites récurrentes générales est exclu.
Caractérisation des fonctions constantes et monotones par le signe de la dérivée.	Résultat admis. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f' \geqslant 0$ sur I, f' ne s'annulant qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.
Extremum local d'une fonction dérivable.	Une fonction f, dérivable sur un intervalle ouvert I, admet un extremum local en un point de I si sa dérivée s'annule en changeant de signe en ce point.

b) Dérivées successives

Fonctions 2 fois dérivables.
Fonctions de classe C^1, C^2, C^∞.
Opérations algébriques.

c) Convexité

Les fonctions convexes sont des outils de modélisation en économie. On pourra s'appuyer sur un exemple simple (par exemple, une fonction de coût) pour en motiver la définition. Tous les résultats de cette section seront admis. Les fonctions étudiées sont au moins de classe C^2.

Définition d'une fonction convexe.	Une fonction est convexe sur un intervalle I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2$ tels que $t_1 + t_2 = 1$, $$f(t_1x_1 + t_2x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$ Interprétation géométrique. ▶
Fonctions concaves. Points d'inflexion.	
Caractérisation des fonctions convexes de classe C^2.	Si f est de classe C^2, f est convexe si et seulement si l'une de ces deux propositions est vérifiée : • f' est croissante ; • f" est positive ; • C_f est au-dessus de ses tangentes.
Caractérisation des fonctions concaves de classe C^2. Si la dérivée d'une fonction convexe f de classe C^2 sur un intervalle ouvert s'annule en un point, f admet un minimum en ce point.	
Représentation graphique d'une fonction convexe.	▶

2 - Représentations de graphes des fonctions d'une variable sur un intervalle

Utilisation récapitulative des notions précédentes pour l'étude graphique de fonctions.	Allure locale du graphe. Exemples de points d'inflexion.

3 - Équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Les modèles mathématiques utilisés pour étudier des phénomènes dynamiques peuvent être à temps discret ou à temps continu. La problématique de modélisation en temps continu sera mise en place à l'aide des équations différentielles linéaires à coefficients constants. On donnera l'exemple de l'équation différentielle logistique sans insister sur les difficultés techniques, en lien avec le modèle de Solow. On introduit la notion d'équilibre, une situation qui n'évolue pas et qu'on obtient le plus souvent comme l'aboutissement du phénomène évolutif.

Résolution de $y' + ay = b(t)$ où a est un nombre réel et b est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$.	Cas particulier où b est constante.
Équation homogène, solution particulière.	On remarque que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaisons linéaires.
Résolution de $y'' + ay' + by = c$ où a, b et c sont des nombres réels. Équation homogène, solution particulière.	On se restreint au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles. On remarque que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par combinaisons linéaires.

Exemples de résolution d'équations $y'' + ay' + by = c(t)$ où a, b et c est une fonction continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$.

On se restreint au cas où l'équation caractéristique a des racines réelles.

Principe de superposition.

La recherche d'une solution particulière doit être accompagnée.

Trajectoires.

On remarque qu'une trajectoire est uniquement déterminée par ses conditions initiales et que deux trajectoires différentes sont d'intersection vide. ▶

Équilibre.

Une trajectoire d'équilibre est constante.
On constatera sur des exemples que si une trajectoire converge lorsque t tend vers $+\infty$, elle converge vers un équilibre. ▶

4 - Intégration sur un segment

On introduit ce chapitre en rappelant le lien entre la notion de primitive et l'aire sous la courbe estimée par la méthode des rectangles vue en terminale.

a) Définition

Aire sous la courbe d'une fonction positive.

Dans le cas où f est continue monotone, on constatera que cette fonction « aire sous la courbe » admet f pour dérivée.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

Toute fonction continue sur un intervalle admet, sur cet intervalle, au moins une primitive.

Admis.

Intégrale d'une fonction continue sur un segment.
Relation de Chasles.

Si f est continue sur un intervalle I, pour tout $(a, b) \in I^2$, on définit l'intégrale de f de a à b par :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f sur I. Cette définition est indépendante du choix de la primitive F de f sur I.

b) Propriétés de l'intégrale

Linéarité de l'intégrale.
L'intégrale d'une fonction positive sur un segment est positive.
L'intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur le segment.

Si $a \leqslant b$, $$\left\lvert\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$$	Résultat admis On enseignera aux étudiants à majorer et à minorer des intégrales par utilisation de cette inégalité ou par intégration d'inégalités.

c) Techniques de calcul d'intégrales

On évitera tout excès de technicité pour les calculs d'intégrales par changement de variable.

Calcul de primitives « à vue », déduites de la reconnaissance de schémas inverses de dérivation.	On insistera sur le modèle $u'(x)u(x)^{\alpha}$ ($\alpha \neq -1$ ou $\alpha = -1$).
Intégration par parties. Changement de variables.	*On se restreindra à des changements de variables C^1 strictement monotones.* *Les changements de variables autres qu'affines seront précisés dans les exercices.* *On pourra à titre d'exemples étudier des suites définies par une intégrale et des fonctions définies par une intégrale.*

III - Étude élémentaire des séries

Ce chapitre fait suite au chapitre sur les suites numériques réelles du premier semestre, une série étant introduite comme une suite de sommes partielles. Aucune technicité n'est exigible en première année. L'étude des variables aléatoires discrètes sera l'occasion d'une mise en œuvre naturelle de ces premières connaissances sur les séries. L'étude des séries sera complétée en seconde année par les techniques de comparaison sur les séries à termes positifs.

1 - Séries numériques à termes réels

Série de terme général u_n. Sommes partielles associées.	
Définition de la convergence. Combinaison linéaire de séries convergentes.	$\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge si $\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. On pratiquera, sur des exemples simples, l'étude des séries (convergence, calcul exact ou approché de la somme). On soulignera l'intérêt de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ pour l'étude de la suite (u_n). $\boxed{\blacktriangleright}$
Série à termes positifs.	
Convergence absolue.	En première année, cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
La convergence absolue implique la convergence.	Résultat admis.

2 - Séries numériques usuelles

Étude des séries $\sum q^n, \sum nq^{n-1}$, $\sum n(n-1)q^{n-2}$ et calcul de leurs sommes.	
Convergence et somme de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$.	Résultats admis.

IV - Probabilités - Variables aléatoires réelles

Dans ce chapitre, on généralise l'étude faite au premier semestre ; le vocabulaire général est adopté et complété (en particulier le vocabulaire « espace probabilisé » et la notation $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), mais aucune difficulté théorique sur l'ensemble des événements ne sera soulevée dans ce cadre. On n'emploiera pas le terme tribu.
L'étude des variables aléatoires et notamment celles associées aux lois usuelles se fera en lien étroit avec la partie informatique du programme. $\boxed{\blacktriangleright}$
L'étude des variables aléatoires discrètes se fera dans la mesure du possible en tant qu'outil de modélisation de problèmes concrets.

1 - Espace probabilisé

On généralisera dans ce paragraphe l'étude effectuée lors du premier semestre sans soulever de difficultés théoriques.

Univers Ω des issues d'une expérience et ensemble des événements $\mathcal{A}$.	L'ensemble des événements contient Ω, est stable par union, par intersection dénombrable et par passage au complémentaire.
Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω. Généralisation de la notion de probabilité.	
Généralisation de la notion de système complet d'événements à une famille dénombrable d'événements deux à deux incompatibles et de réunion égale à Ω. Généralisation de la notion de probabilité conditionnelle. Généralisation de la formule des probabilités composées. Généralisation de la formule des probabilités totales. Indépendance mutuelle d'une suite infinie d'événements.	

2 - Généralités sur les variables aléatoires réelles

Définition d'une variable aléatoire réelle.	X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si X est une application de Ω dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout élément x de $\mathbf{R}$, $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{A}$. Démontrer que X est une variable aléatoire ne fait pas partie des exigibles du programme. Notations $[X \in I]$, $[X = x]$, $[X \leqslant x]$, etc.
Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.	

3 - Variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera pas de difficulté théorique liée à l'ordre (convergence commutative d'une série absolument convergente) ou à la dénombrabilité.

a) Variable aléatoire discrète à valeurs dans R

Définition d'une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{R}$.	L'ensemble des valeurs prises par ces variables aléatoires sera indexé par une partie finie ou infinie de $\mathbf{N}$.
Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.	
Variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. Étude de la loi de $Y = g(X)$.	On se limite à des cas simples, tels que $g\ :\ x \longmapsto ax + b$, $g\ :\ x \longmapsto x^2$, ...

b) Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition de l'espérance.	Quand $X(\Omega)$ est infini, une variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ est absolument convergente. Notation $\mathrm{E}(X)$.
Linéarité de l'espérance. Positivité.	Résultats admis.
Variables aléatoires centrées.	
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Y = g(X)$, où g est définie sur l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.	Quand $X(\Omega)$ est infini, $\mathrm{E}(g(X))$ existe si et seulement si la série $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ converge absolument, et dans ce cas $\mathrm{E}(g(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. Théorème admis.
$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$.	
Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$.

Formule de Kœnig-Huygens.	$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$.
$\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	
Variables aléatoires centrées réduites.	On notera X^* la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

4 - Lois usuelles

a) Lois discrètes finies

Loi certaine.	Caractérisation par la variance.
Loi de Bernoulli. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
Loi binomiale. Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. $\boxed{\blacktriangleright}$
Application : formule du binôme de Newton donnant $(a+b)^n$.	Lorsque a et b sont strictement positifs, lien avec $\mathcal{B}(n, \frac{a}{a+b})$. La formule du binôme de Newton dans le cas général pourra être démontrée par récurrence.
Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Espérance, variance.	Application à l'étude de la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$, où $(a,b) \in \mathbf{N}^2$. Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$. $\boxed{\blacktriangleright}$

b) Lois discrètes infinies

Loi géométrique (rang d'apparition du premier succès dans un processus de Bernoulli sans mémoire). Espérance, variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. $\boxed{\blacktriangleright}$ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p), \forall k \in \mathbf{N}^*, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.
Loi de Poisson. Espérance, variance Contexte d'utilisation.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On pourra remarquer que la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est loi « limite » (cette notion sera précisée en deuxième année) d'une suite de variables suivant la loi binomiale $B(n, \frac{\lambda}{n})$. $\boxed{\blacktriangleright}$

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

I - Programme du premier semestre.

Les séances de travaux pratiques du premier semestre poursuivent les objectifs suivants :

- *consolider l'apprentissage de la programmation qui a été entrepris dans les classes du lycée en langage Python ;*
- *mettre en place une discipline de programmation : découpage modulaire à l'aide de fonctions et programmes, annotations et commentaires, évaluation par tests ;*
- *mettre en pratique des algorithmes facilitant le traitement de l'information, la modélisation, la simulation.*

1 - Algorithmique des listes

Il s'agit de présenter des algorithmes simples, spécifiés de façon abstraite, puis de les traduire dans un langage de programmation, ici Python. On utilisera ces activités pour construire une progression pour assimiler les notions de variables, de type, d'affectation, d'instruction conditionnelle, de boucles conditionnelles ou inconditionnelles et manipuler de façon simple les listes en Python. S'il n'est pas souhaitable de les formaliser, on dégagera de l'étude de ces algorithmes simples les problématiques de la correction et la terminaison des algorithmes. Ces notions ne sont pas exigibles.

Recherche séquentielle dans une liste.	Recherche d'un élément. Recherche du maximum, du second maximum.
Algorithmes opérant sur une structure séquentielle par boucles imbriquées.	Recherche des deux valeurs les plus proches dans une liste.
Algorithmes dichotomiques.	Recherche dichotomique dans une liste triée.
Algorithmes gloutons.	Rendu de monnaie. Allocation de salles pour des cours.

2 - Statistiques descriptives et analyse de données.

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques publiques obtenues sous forme d'un fichier csv (Comma-separate-value). Pour ce faire, on pourra utiliser le site data.gouv ou le site de l'Insee et choisir des données socio-économiques. On travaille directement sur le fichier de données sous forme de table en important la bibliothèque `pandas` *ou après transformation directement sur un tableur. On indiquera aux étudiants les commandes à utiliser. Aucune de ces commandes de cette bibliothèque n'est exigible.*

Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	
Exemples d'analyse des données.	On pourra faire des tris sélectifs, donner des exemples de calculs d'indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles. ou d'indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile. On discutera la signification des résultats obtenus.
Représentations des données. Diagrammes en bâtons, histogrammes.	On pourra utiliser la bibliothèque `matplotlib`.

3 - Approximation numérique

Calcul approché de la racine d'une équation du type $f(x) = 0$.

On utilisera différentes méthodes dont certaines résulteront d'une étude mathématique (suites récurrentes, encadrements, dichotomie).

II - Programme du deuxième semestre.

1 - Graphes finis, plus courts chemins

Il s'agit de revenir sur le modèle des graphes et d'étudier les démarches algorithmiques permettant de les analyser selon leurs représentations.

Graphes.

Un graphe est implémenté à l'aide de listes d'adjacence (rassemblées par exemple dans une liste ou dans un dictionnaire) ou par sa matrice d'adjacence.

Recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré avec des poids positifs.
Algorithme de Dijkstra.

2 - Simulation de phénomènes aléatoires

Simulation d'expériences aléatoires élémentaires conduisant à une loi usuelle.
Simulation de phénomènes aléatoires.

Loi binomiale, loi géométrique.

III - Annexe : Langage Python

Toute la richesse du langage Python ne peut pas être entièrement maîtrisée par un étudiant, aussi le paragraphe ci-dessous liste limitativement les éléments du langage Python (version 3 ou supérieure) dont la connaissance est exigible des étudiants. Il s'agit de la liste des commandes utiles pour les travaux pratiques des deux années de formation. Il n'y a pas lieu d'introduire en première année les commandes qui relèvent de notions de seconde année.

1 - Types de base

`+`	`-`	`*`	`/`	`**`	
`==`	`>`	`<`	`>=`	`<=`	`!=`
`True`	`False`	`and`	`or`	`not`	

`+` `-` `*` `/` `**` : Opérations arithmétiques de base.

`==` `>` `<` `>=` `<=` `!=` : Comparaison, test.

`True` `False` `and` `or` `not` : Logique.

`from ... import *, import ... as` : Importation d'une bibliothèque.

2 - Structures de contrôle

Instruction d'affectation =.

Instruction conditionnelle `if`, `elif`, `else`.

Boucle `for` ; Boucle `while`.

Définition d'une fonction `def` $f(p_1, \dots, p_n)$
`return`.

3 - Listes

Tableau unidimensionnel ou liste.
Définitions d'une liste avec une boucle ou en compréhension.
Fonction `range`.
Commandes `append` , `len`.

Il n'y a pas lieu de distinguer ces deux structures de données en langage Python.

Recherche séquentielle dans une liste.
Commandes `in` `del` `count`.

Manipulations élémentaires de listes.
Commandes $+$ et $*$.

4 - Utilisation de modules, de bibliothèques

`from ... import *, import ... as`

Importation d'une bibliothèque.

Pour le calcul numérique, le traitement statistique ou la simulation de phénomènes aléatoires, certaines bibliothèques s'avèrent utiles. Elles sont listées ci-dessous avec les fonctions pertinentes. Toute utilisation d'une telle fonction doit obligatoirement être accompagnée de la documentation utile, sans que puisse être attendue une quelconque maîtrise par les étudiants de ces éléments.

a) Dans la bibliothèque `numpy`

Exemple d'importation : `import numpy as np`

`np.array, np.zeros, np.ones, np.eye, np.linspace, np.arange`	Création de vecteurs et de matrices. Extraction ou modification d'un élément, d'une ligne ou d'une colonne d'une matrice.
`+` | `-` | `*` | `/` | `**`	Opérations arithmétiques de base : coefficient par coefficient.
`==` | `>` | `<` | `>=` | `<=` | `!=`	Comparaison de deux matrices (`M == N`), comparaison d'une matrice et d'un nombre (`M>=1`).
`a,b = np.shape(M)`	Taille de la matrice `M`.
`np.dot, np.transpose`	Syntaxes exigibles : `np.transpose(M)`, `np.dot(M1,M2)`. L'usage de méthode comme `M.transpose()`, `M1.dot(M2)` est non-exigible.
`np.sum, np.min, np.max, np.mean, np.cumsum, np.median, np.var, np.std`	Ces opérations peuvent s'appliquer sur une matrice entière ou bien pour chaque colonne (ou chaque ligne). Exemple : `mean(M)`, `mean(M,0)`, `mean(M,1)`
`np.exp, np.log, np.sqrt, np.abs, np.floor`	Ces fonctions peuvent s'appliquer à des variables numériques ou vectoriellement (à des matrices ou vecteurs) élément par élément. On pourra utiliser la commande `f = np.vectorize(f)` mais elle n'est pas exigible.

`np.e, np.pi`

b) Dans la librairie `numpy.linalg`

Exemple d'importation : `import numpy.linagl as al`

`al.inv, al.rank, al.matrix_power,`
`al.solve, al.eig`

c) Dans la librairie `numpy.random`

Exemple d'importation : `import numpy.random as rd`

`rd.random, rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson, rd.exponential, rd.normal, rd.gamma`	On utilisera ces fonctions pour générer un nombre aléatoire ou bien un vecteur ou une matrice à coefficients aléatoires. Exemple : `rd.binomial(10,0.2)`, `rd.binomial(10,0.2,100)`, `rd.binomial(10,0.2,[100,10])`

d) Dans la librairie `matplotlib.pyplot`

Exemple d'importation : `import matplotlib.pyplot as plt`

`plt.plot, plt.show`	Représentations graphiques de fonctions, de suites. On pourra utiliser les commandes `xlim, ylim, axis, grid, legend` mais elles ne sont pas exigibles.
`plt.hist, plt.bar, plt.boxplot`	Représentations statistiques.
Utilisation de la fonction `rd.random` pour simuler des expériences aléatoires.	On pourra simuler ainsi des lois binomiale et géométrique.
Simulation d'échantillons de lois usuelles.	On pourra utiliser les fonctions `rd.binomial, rd.randint, rd.geometric, rd.poisson`

e) Dans la librairie `pandas`

Exemple d'importation : `import pandas as pd`

`pd.read_csv, head, shape, pd.describe`	Pour créer une table à partir du fichier de données et en visualiser ou manipuler une partie.
`pd.mean, pd.std, pd.median, pd.count, pd.sort_values.`	Indicateurs statistiques.

Classes préparatoires aux grandes écoles

Programme de mathématiques appliquées – informatique de la classe d'ECG 2^{e} année

Table des matières

INTRODUCTION

1 Objectifs généraux de la formation

Les mathématiques jouent un rôle important en sciences économiques et en gestion, dans les domaines notamment de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché, des sciences sociales. Les probabilités et la statistique interviennent dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, sciences sociales...) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement des classes préparatoires économiques et commerciales, option mathématiques appliquées et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants. Ils précisent également certains points de terminologie et certaines notations.

Les limites du programme sont clairement précisées. Elles doivent être respectées aussi bien dans le cadre de l'enseignement en classe que dans l'évaluation.

L'objectif de ce programme est de permettre de façon équilibrée :

— une formation par les mathématiques : une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des étudiants et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par équivalence, implication, l'absurde, analyse-synthèse, ...) ;
— l'acquisition d'outils utiles notamment en sciences sociales et en économie (probabilités statistiques, optimisation) ;
— une culture sur les enjeux actuels et sur les techniques afférentes de l'informatique en lien avec des problématiques issues des sciences sociales ou économiques et l'acquisition mesurée de la démarche algorithmique pour résoudre un problème ou simuler une situation non triviale en lien avec la pratique d'un langage de programmation.

L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'intérêt et l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

2 Compétences développées

L'enseignement de mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales, option mathématiques appliquées, vise en particulier à développer chez les étudiants les compétences suivantes :

- **Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates :** savoir analyser un problème, émettre des conjectures notamment à partir d'exemples, choisir des concepts et des outils mathématiques ou informatiques pertinents.
- **Modéliser :** savoir conceptualiser des situations concrètes (phénomènes aléatoires ou déterministes) et les traduire en langage mathématique, élaborer des algorithmes.
- **Interpréter :** être en mesure d'interpréter des résultats mathématiques dans des situations concrètes, avoir un regard critique sur ces résultats.
- **Raisonner et argumenter :** savoir conduire une démonstration, confirmer ou infirmer des conjectures.
- **Maîtriser le formalisme et les techniques mathématiques :** savoir employer les symboles mathématiques à bon escient, être capable de mener des calculs de manière pertinente et efficace. Utiliser avec discernement l'outil informatique.

- **Communiquer par écrit et oralement :** comprendre les énoncés mathématiques, savoir rédiger une solution rigoureuse, présenter une production mathématique ou une démarche algorithmique.

3 Architecture des programmes

Le programme de mathématiques de deuxième année de la filière EC option mathématiques appliquées, se situe dans le prolongement de celui de première année et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux étudiants le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie ou gestion dispensés en Grande École ou dans une formation universitaire de troisième année de Licence.

Le programme s'organise autour de points forts qui trouveront leur prolongement dans les études futures des étudiants :

- En algèbre linéaire, on introduit les espaces vectoriels de dimension finie : les espaces vectoriels présentés sont tous équipés d'une base naturelle, donc naturellement isomorphes à $\mathbf{R}^n$ pour un certain entier naturel n. L'espace vectoriel, comme objet abstrait n'est pas au programme. Cette définition permet de manipuler les espaces vectoriels usuels et d'introduire la notion d'endomorphisme. On introduit la notion de matrice diagonalisable et on en montre l'intérêt. On évitera des exemples trop calculatoires en privilégiant la compréhension des concepts mathématiques.
  Ces notions d'algèbre linéaire trouveront des applications en analyse lors de l'optimisation des fonctions de deux variables, mais aussi en probabilités (études de chaînes de Markov).
- En analyse, on introduit les intégrales généralisées qui vont permettre l'étude des variables aléatoires à densité. L'outil de comparaison des suites et des fonctions en termes de négligeabilité et d'équivalence, s'avère particulièrement efficace pour l'étude des séries et des intégrales généralisées.
  Il est à noter que seuls les développements limités à l'ordre 1 ou 2 sont au programme.
  Au quatrième semestre, l'étude des fonctions de deux variables réelles constitue un prolongement de l'analyse à une variable. Son objectif principal est d'initier les étudiants aux problèmes d'optimisation, cruciaux en économie et en finance.
- Dans la continuité du programme de première année, et en lien avec les résultats sur la réduction des matrices, on étudie les systèmes différentiels linéaires.
- En probabilité, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée au lycée et poursuivie en première année de classe préparatoire, se prolonge au troisième semestre par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes ; au quatrième semestre, on aborde la notion de graphe probabiliste et la chaîne de Markov associée. On introduit les variables aléatoires à densité, avec l'objectif de permettre, en fin de formation, une bonne compréhension des concepts d'estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.
- En informatique, l'analyse de données en tables déjà étudiée en première année se poursuit avec l'étude des bases de données relationnelles et du langage SQL.

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme. L'algèbre linéaire trouvera ainsi son application dans les problèmes d'optimisation et dans l'étude des chaînes de Markov, l'analyse et les probabilités dans les problèmes d'estimation.

Le programme de mathématiques est organisé en deux semestres. Ce découpage en deux semestres d'enseignement doit être respecté. En revanche, au sein de chaque semestre, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit en toute liberté l'organisation de son enseignement, bien que la présentation par blocs soit fortement déconseillée.

Le programme se présente de la manière suivante : dans la colonne de gauche figurent les contenus exigibles des étudiants ; la colonne de droite comporte des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

Les développements formels ou trop théoriques doivent être évités. Ils ne correspondent pas au cœur de la formation de ces classes préparatoires.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme «admis», la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

Les séances de travaux dirigés permettent de privilégier la prise en main, puis la mise en œuvre par les étudiants, des techniques usuelles et bien délimitées, inscrites dans le corps du programme. Cette maîtrise s'acquiert notamment par l'étude de problèmes que les étudiants doivent *in fine* être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les créneaux horaires dédiés à l'informatique sont consacrés au programme d'informatique. L'objectif est, en continuité avec les apprentissages du lycée, de permettre aux étudiants d'acquérir les bases de la démarche algorithmique, puis une mise en œuvre tournée vers la résolution de problèmes ainsi que l'illustration ou la modélisation de situations concrètes en lien avec les problématiques des sciences économiques et sociales. Le langage de programmation de référence choisi pour ce programme est Python. Le symbole $\boxed{\blacktriangleright}$ indique les notions de mathématiques pouvant être traitées en liaison avec l'informatique.

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU TROISIÈME SEMESTRE

I - Algèbre linéaire

L'objet de ce chapitre est une étude élémentaire des applications linéaires et des espaces vectoriels sur **R***, approfondissant les acquis de première année et les prolongeant par l'étude de la réduction des matrices. L'objectif est d'avoir la possibilité d'utiliser des espaces vectoriels concrets, naturellement isomorphes à* $\mathbf{R}^n$ *et de pouvoir y manipuler les changements de bases, sans introduire les espaces vectoriels abstraits. Cette partie du programme sera ensuite utilisée en analyse dans l'étude des points critiques des fonctions de deux variables et en probabilités (chaînes de Markov...).*

1 - Espaces vectoriels réels de dimension finie

Cette partie doit être traitée dans sa plus simple expression. Les notions étudiées en première année sont étendues dans un cadre plus abstrait sans démonstration en s'appuyant sur les exemples de référence listés ci-dessous.

Espace vectoriel sur **R**. Un espace vectoriel de dimension n est un ensemble E muni d'une opération interne $+$, d'une opération externe . et d'une bijection de E sur $\mathbf{R}^n$ qui préserve les combinaisons linéaires.	On se limite par définition au cas de la dimension finie. On illustre ces définitions en liaison avec le programme de première année complété par les espaces vectoriels de référence suivants : $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, $\mathbf{R}_n[x]$.
Familles libres, familles génératrices, bases. Base canonique de $\mathbf{R}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et de $\mathbf{R}_n[x]$. Sous-espace vectoriel. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.	

2 - Endomorphismes d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre. Endomorphisme, isomorphisme. Composée de deux applications linéaires. Noyau et image d'une application linéaire. Rang d'une application linéaire.	Ecriture matricielle.
Théorème du rang. Application à la caractérisation des isomorphismes en dimension finie.	Résultat admis.
Matrice associée à une application linéaire dans des bases, matrice d'un endomorphisme.	Lien entre le rang d'une matrice et le rang de l'application linéaire associée. Lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires.

Changement de base, matrice dee passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.	Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Formules de changement de base.	$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\ P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
Matrices semblables.	Deux matrices A et B carrées sont semblables si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. A et B peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

3 - Réduction des matrices carrées

Le paragraphe est essentiellement consacré à l'introduction des matrices diagonalisables. Dans tout ce paragraphe, on évitera les méthodes trop calculatoires pour la recherche des éléments propres d'une matrice. En particulier, la résolution de systèmes à paramètres est déconseillée. Ces notions seront mises en situation dans l'étude pratique des suites récurrentes linéaires, de systèmes différentiels, de chaînes de Markov, et pour l'utilisation de la matrice hessienne dans les recherches d'extrema.

Spectre d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(A)$.
Si Q est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de ce polynôme.	Aucune connaissance supplémentaire sur les polynômes annulateurs n'est au programme.
Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de $\mathbf{R}^n$.	
Matrice carrée diagonalisable.	Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable s'il existe une matrice D, diagonale, et une matrice P, inversible, telles que $D = P^{-1}AP$. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres de A. Exemples de diagonalisation de matrices carrées. Sur des exemples, application au calcul de puissances n-ièmes d'une matrice carrée. Exemples de calculs de puissances n-ièmes d'une matrice carrée, non nécessairement diagonalisable, à l'aide de la formule du binôme. Application à l'étude de suites récurrentes linéaires.
Toute matrice symétrique est diagonalisable.	Résultat admis.

II - Compléments d'analyse

1 - Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

On pourra introduire les systèmes différentiels en utilisant un exemple basé sur la loi de l'offre et la demande.

Écriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice réelle.	Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Résultat admis.
Pratique de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable de taille 2 ou 3.	L'exponentielle de matrice n'est pas au programme.
Comportement asymptotique des trajectoires en fonction du signe des valeurs propres de A dans le cas où A est diagonalisable. Stabilité des solutions, état d'équilibre.	
Équivalence entre une équation scalaire d'ordre 2 et un système de 2 équations d'ordre 1.	On fait le lien avec la forme des solutions d'une équation scalaire d'ordre 2 étudiée en première année.

2 - Compléments sur les suites et les séries

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire de nouveaux outils d'étude des suites et des séries, en particulier les critères de comparaison, tout en consolidant les acquis de première année.

a) Comparaison des suites réelles

Suite négligeable devant une suite, suites équivalentes.	Notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On réécrira les croissances comparées de première année. On pratiquera des études du comportement asymptotique de suites.

b) Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Etude de suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.	On remarquera le cas où f est croissante.
Notion de point fixe d'une application. Si (u_n) converge vers un réel ℓ et si f continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.	On pourra illustrer cette partie du programme avec Python. ▶.

c) Compléments sur les séries

L'étude des séries ne s'applique que dans le cadre de l'étude de variables aléatoires discrètes.

Convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.	Ce résultat pourra être démontré dans le chapitre sur les intégrales généralisées.

Séries à termes positifs. Comparaison des séries à termes positifs dans les cas où $u_n \leqslant v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.	
Exemples d'étude de séries à termes quelconques.	On utilisera la notion de convergence absolue vue en première année. On donne des exemples de sommes télescopiques.

3 - Compléments sur l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle

a) Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Fonction négligeable devant une fonction, fonctions équivalentes.	Notations $f = o(g)$ et $f \sim g$ Les théorèmes de croissances comparées vus en première année sont reformulés ici avec les notations de la négligeabilité. Traduction, en termes de négligeabilité et d'équivalence, des limites connues concernant les fonctions usuelles.
Compatibilité de l'équivalence vis-à-vis des opérations suivantes : produit, quotient, composition par une fonction puissance entière.	On mettra en garde contre l'extension abusive à l'addition ou à la composition par d'autres fonctions $(\ln, \exp, \dots)$.

b) Développements limités

*Les développements limités ne seront présentés qu'**à l'ordre au plus 2**. Les développements limités seront par la suite étendus aux fonctions de deux variables.*
Les seuls développements exigibles concernent les fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0, et à l'ordre 1 ou 2 uniquement. Aucune connaissance (somme, produit, composition...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible.

Développement limité d'ordre 2 (respectivement d'ordre 1) en x_0 d'une fonction de classe C^2 (respectivement de classe C^1) au voisinage de x_0.	Unicité. Formule de Taylor-Young. Résultats admis.
Allure locale du graphe d'une fonction admettant un développement limité du type : $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\epsilon(x-x_0)$, avec $a_2 \neq 0$.	Exemples.
Cas des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0.	Sur des exemples, application à l'étude locale de fonctions.

4 - Intégration généralisée à un intervalle quelconque

Les intégrales généralisées sont introduites dans ce programme comme outil pour l'étude des variables aléatoires à densité. Il s'agit ici d'une part d'étendre la notion d'intégrale à un intervalle quelconque, d'autre part de mettre en place les techniques de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Les résultats de ce paragraphe pourront être admis. À cette occasion, on pourra consolider les acquis de première année concernant l'intégration sur un segment (positivité, techniques de calcul, intégrales comme fonctions de la borne supérieure...).

a) Intégrales sur un intervalle de type $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ ou $]-\infty,+\infty[$

Convergence des intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est continue sur $[a,+\infty[$.	$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie.
Linéarité, positivité, relation de Chasles.	Les techniques de calcul (intégration par parties, changement de variables non affine) ne seront pratiquées qu'avec des intégrales sur un segment.
Convergence des intégrales de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.	On pourra en déduire la convergence des séries de Riemann $\displaystyle\sum\frac{1}{n^\alpha}$.
Extension des notions précédentes aux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.	

b) Convergence des intégrales de fonctions positives sur un intervalle de type $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x\longmapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,+\infty[$.	De même, si f est continue et positive sur $]-\infty,a]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x\longmapsto\displaystyle\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $]-\infty,a]$.
Règles de comparaison dans les cas $f\leqslant g$, $f=o(g)$ et $f\underset{+\infty}{\sim}g$ avec f et g positives au voisinage de $+\infty$.	On adaptera ces propriétés au voisinage de $-\infty$. On utilisera comme intégrales de référence les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ (pour $a>0$) et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$.

c) Convergence absolue

Convergence absolue.	Cette notion est abordée uniquement pour permettre une définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité.
La convergence absolue implique la convergence.	Résultat admis.
Extension aux intégrales du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$	

III - Probabilités et statistiques

1 - Statistiques bivariées

On s'appuiera dans ce paragraphe sur des données réelles issues du domaine de l'économie ou des sciences sociales (loi d'Okun, corrélation entre données économiques...).

Série statistique à deux variables quantitatives discrètes, nuage de points associé.	
Point moyen du nuage.	Notation $(\bar{x}, \bar{y})$.
Covariance empirique s_{xy}, formule de Koenig-Huygens.	Pour des n uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\quad s_{x,y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Cœfficient de corrélation linéaire empirique r_{xy}, propriétés et interprétation de ce coefficient.	$-1 \leqslant r_{x,y} \leqslant 1$ et interprétation lorsque $\lvert r_{x,y} \rvert = 1$.
Ajustement des moindres carrés, droites de régression.	On pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire. On distinguera les variables explicatives des variables à expliquer. On discutera de la pertinence d'une régression linéaire selon les données observées.

2 - Couples de variables aléatoires discrètes

On ne soulèvera aucune difficulté sur les séries indexées par des ensembles dénombrables, que l'on traitera comme des séries classiques. On admettra que toutes les manipulations (interversions de sommes, regroupements de termes, etc.) sont licites (sans exiger la vérification de la convergence absolue des séries envisagées). On admettra aussi que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes.	La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée de $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y])$. On commencera par aborder des exemples où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.
Lois marginales, lois conditionnelles.	
Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y).	On se limitera à des cas simples tels que $X + Y,\ XY$.
Théorème de transfert : espérance d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction réelle définie sur l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y) de variables aléatoires	$E(g(X, Y)) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y])$ (sous réserve de convergence absolue). Résultat admis. En particulier : espérance de la somme, du produit de deux variables aléatoires discrètes.
Linéarité de l'espérance.	Résultat admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.	Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x])P([Y = y])$.
Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Résultat admis.
Loi du minimum, du maximum, de deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	
Stabilité des lois binomiales et de Poisson.	- Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. - Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Covariance de deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.	Notation $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Linéarité à droite, à gauche. Symétrie. Si $a \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Cov}(X, a) = 0$.
Formule de Koenig-Huygens. Conséquence.	$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si X et Y sont indépendantes et possèdent un moment d'ordre 2, leur covariance est nulle. Réciproque fausse.
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X, Y)$.
Propriétés.	$\lvert\rho(X, Y)\rvert \leqslant 1$. Cas où $\rho(X, Y) = \pm 1$.
Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes. Cas de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.	On pourra admettre ce résultat.

3 - Suites de variables aléatoires discrètes

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles discrètes.	$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, $$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i = x_i]).$$
Indépendance d'une suite infinie de variables aléatoires réelles discrètes.	
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2 ,..., X_n, sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n. Résultat admis.

Espérance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes. Variance de la somme de n variables aléatoires réelles discrètes indépendantes.	

ENSEIGNEMENT DE MATHÉMATIQUES DU QUATRIÈME SEMESTRE

I - Fonctions numériques de deux variables réelles

L'objectif de ce chapitre est d'arriver à une bonne compréhension des problèmes de recherche d'extrema des fonctions de deux variables en faisant le lien avec les résultats concernant la réduction des matrices.

Dans les deux premiers paragraphes, on familiarisera les étudiants avec la notion de fonction de deux variables réelles en évitant tout problème de nature topologique, c'est pourquoi le domaine de définition sera systématiquement $\mathbf{R}^2$.

On introduira la notion de fonction de deux variables réelles à l'aide d'exemples issus d'autres disciplines et on exploitera les visualisations informatiques des surfaces en 3D ou les recherches d'éléments propres de matrices permises par Python.

Tous les résultats concernant les fonctions réelles de deux variables réelles seront admis.

1 - Fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$

Exemples de fonctions réelles de deux variables réelles.	Fonctions coordonnées $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$. Fonctions polynomiales de deux variables réelles.
Distance euclidienne de deux points $\mathbf{R}^2$.	Notation $\mathrm{d}\big((x, y), (x_0, y_0)\big)$.
Continuité d'une fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$.	Une fonction réelle f de deux variables réelles, définie sur $\mathbf{R}^2$, est continue en un point (x_0, y_0) de $\mathbf{R}^2$ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{d}\big((x, y), (x_0, y_0)\big) < r \Rightarrow \mid f(x, y) - f(x_0, y_0) \mid < \varepsilon$. Aucune difficulté ne sera soulevée sur cette notion. On fera le lien avec la continuité des fonctions d'une variable réelle.
Opérations sur les fonctions continues.	Les fonctions coordonnées sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la somme, le produit, le quotient (quand le dénominateur est non nul) de deux fonctions continues sont continus. Les fonctions polynomiales de deux variables réelles sont continues sur $\mathbf{R}^2$. On admettra que la composée d'une fonction continue à valeurs dans un intervalle I de $\mathbf{R}$ par une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue.
Lignes de niveau.	Illustration sur des exemples (Cobb-Douglas etc...).

2 - Calcul différentiel pour les fonctions définies sur $\mathbf{R}^2$

Dérivées partielles d'ordre 1. Fonctions de classe C^1. Une fonction de classe C^1 est continue. Opérations sur les fonctions de classe C^1.	Notations $\partial_1 f$, $\partial_2 f$. La détermination de la classe d'une fonction en un point problématique est hors programme.
Gradient de f en un point.	Notation $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x,y) \\ \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$. $f(x+h, y+k) = f(x,y) + {}^t\nabla f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ $+ \sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,k)$ où $\varepsilon(0,0) = 0$ et ε continue en (0,0). Résultat non exigible.
Dérivées partielles d'ordre 2. Fonctions de classe C^2. Une fonction de classe C^2 est de classe C^1. Opérations sur les fonctions de classe C^2.	Notations $\partial^2_{1,1} f, \partial^2_{1,2} f, \partial^2_{2,1} f, \partial^2_{2,2} f$ où $$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_1(\partial_2 f)(x,y).$$
Théorème de Schwarz.	Si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, alors pour tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$, $$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y).$$
Matrice hessienne d'une fonction de deux variables réelles au point (x,y).	Notation $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y) \\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y) \end{pmatrix}$. On remarquera que si f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$, sa matrice hessienne en tout point (x,y) de $\mathbf{R}^2$ est symétrique.

3 - Extrema d'une fonction de deux variables réelles

Dans ce paragraphe, on sensibilisera les étudiants aux notions d'ouverts et de fermés de $\mathbf{R}^2$. On donnera la définition d'un ensemble borné.
La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme et devra toujours être indiquée.
On étendra brièvement les définitions et propriétés concernant la continuité (respectivement le calcul différentiel) à des fonctions définies sur des parties (respectivement parties ouvertes) de $\mathbf{R}^2$.

Maximum, minimum local d'une fonction de deux variables réelles. Maximum, minimum global d'une fonction de deux variables réelles sur une partie de $\mathbf{R}^2$.	
Une fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^2$ est bornée et atteint ses bornes sur cette partie.	Résultat admis.

Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Point critique.	Si une fonction de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$ admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathcal{O}$, alors $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. On pourra revenir à titre d'exemple sur la détermination des coefficients de la droite de régression.
Condition suffisante d'existence d'un extremum local.	Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont strictement positives (respectivement strictement négatives) alors f admet un minimum (respectivement maximum) local en (x_0, y_0).
Point col (ou point selle).	Si $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ est un point critique pour f et si les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) et (x_0, y_0) est un point col pour f.

II - Probabilités

1 - Graphes probabilistes (chaînes de Markov)

Tous les résultats de cette section seront admis.

Graphe probabiliste. Matrice de transition.	On commence par l'exemple simple d'un graphe à deux ou trois états. Les sommets du graphe sont numérotés à partir de 1.
Chaîne de Markov associée (X_n).	X_n est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des sommets du graphe.
Etats de la chaine de Markov.	Le n-ème état de la chaîne de Markov, noté V_n, est la matrice ligne $(P(X_n = 1), ..., P(X_n = r))$.
Si $M = (m_{i,j})$, on a la formule : $P(X_n = j) = \sum_{i=1}^{r} m_{i,j} P(X_{n-1} = i)$.	Les coefficients de la matrice de transition sont des probabilités conditionnelles.
Relation de récurrence matricielle entre les états successifs de la chaîne de Markov.	$V_n = V_{n-1}M$. On pourra introduire l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ $\mu : W \mapsto WM$ et remarquer que la matrice de μ dans la base canonique est ${}^tM$.
Etat stable.	$V = VM$. La matrice des coordonnées de V dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ (soit ${}^tV$) est un vecteur propre de ${}^tM$ relatif à la valeur propre 1. On donnera l'interprétation probabiliste de l'état stable.

Etude sur des exemples des différents comportements possibles d'un graphe probabiliste à deux états.	Savoir-faire non exigible.

2 - Variables aléatoires à densité

On se limitera dans ce chapitre à des densités ayant des limites finies à gauche et à droite, en tout point de $\mathbf{R}$.

a) Définition des variables aléatoires à densité

Définition d'une variable aléatoire à densité.	On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un ensemble fini de points.
Toute fonction f_X à valeurs positives, qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de points, est une densité de X.	Pour tout x de $\mathbf{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ \mathrm{d}t$.
Caractérisation de la loi d'une variable à densité par la donnée d'une densité f_X.	
Toute fonction f positive, continue sur $\mathbf{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$ est la densité d'une variable aléatoire.	Résultat admis.
Si f est une densité de probabilité, $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 en tout point où f est continue.	En un tel point, $F'(x) = f(x)$. Résultat admis.
Transformation affine d'une variable à densité.	Les étudiants devront savoir calculer la fonction de répartition et une densité de $aX + b$ ($a \neq 0$).

b) Moments d'une variable aléatoire à densité

Espérance.	Une variable aléatoire X de densité f_X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente ; dans ce cas, $\mathrm{E}(X)$ est égale à cette intégrale. Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance.
Variable aléatoire centrée.	

Théorème de transfert pour l'espérance.	Si X est une variable aléatoire admettant une densité f nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ et si g est une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points sur $]a,b[$, $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument et dans ce cas : $E(g(X)) = \displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\ \mathrm{d}t$. Résultat admis.
Variance, écart-type, variables aléatoires centrées réduites.	Exemples de variables aléatoires n'admettant pas de variance.

c) Lois à densité usuelles

Pour chacune de ces lois, on donnera des contextes dans lesquels on les utilise.

Loi uniforme sur un intervalle. Espérance. Variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$. ▶
Loi exponentielle. Caractérisation par l'absence de mémoire. Espérance. Variance.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. ▶
Loi normale centrée réduite.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. ▶ On pourra démontrer en exercice que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ converge.
Loi normale (ou de Laplace-Gauss). Espérance. Variance.	$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On attend des étudiants qu'ils sachent représenter graphiquement les fonctions densités des lois normales et utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.	$\forall x \in \mathbf{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
Une somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale.	Résultat admis.

d) Exemples simples de transferts

On réinvestira dans ce paragraphe les lois usuelles à densité.

Calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire à densité.	Les candidats devront savoir retrouver les densités de $aX+b$ $(a \neq 0)$, X^2, $\exp(X)$, ... Loi de $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$, où Y suit une loi uniforme à densité sur l'intervalle $[0,1[$.
Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois uniformes.	Si $a<b$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1] \Longleftrightarrow Y = a+(b-a)X \hookrightarrow \mathcal{U}[a,b]$.

Transformées affines de variables aléatoires suivant des lois normales.	Si $a \neq 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Longleftrightarrow aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$.

3 - Compléments sur les variables aléatoires réelles quelconques

La définition de l'espérance ou des moments d'ordre supérieur d'une variable aléatoire quelconque est hors d'atteinte dans le cadre de ce programme et toute difficulté s'y ramenant est à écarter. On admettra que les propriétés opératoires usuelles de l'espérance et de la variance se généralisent aux variables aléatoires quelconques. En particulier, le théorème de transfert ci-dessous permet de calculer l'espérance de $g(X)$ dans le cas où X est à densité.

Tous les résultats de cette section seront admis.

Indépendance de deux variables aléatoires réelles quelconques.	Deux variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes si et seulement si $P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I])P([Y \in J])$ pour tous intervalles réels I et J. Généralisation à un ensemble fini ou une suite de variables aléatoires réelles quelconques.
Lemme des coalitions.	Si X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes, toute variable aléatoire fonction de X_1, X_2, ..., X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction de X_{p+1}, X_{p+2}, ..., X_n.
Espérance d'une somme de variables aléatoires.	Si X et Y admettent une espérance, $X+Y$ admet une espérance et $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires.
Croissance de l'espérance.	Si $P([X \leqslant Y]) = 1$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.
Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes, XY admet une espérance et $E(XY) = E(X)E(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.
Variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes.	Si X et Y sont indépendantes et admettent une variance, $X + Y$ admet une variance et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

4 - Convergences et approximations

a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On pourra démontrer ces inégalités dans le cas d'une variable aléatoire discrète ou à densité.

Inégalité de Markov.

Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une espérance,

$$\forall a > 0, \quad P([X \geqslant a]) \leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

Résultat non exigible. On pourra appliquer cette inégalité à $Y = |X|^r$, $r \in \mathbf{N}^*$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P([|X - E(X)| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

b) Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.

Alors $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to+\infty} P([|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon]) = 0$.

c) Convergence en loi

Définition de la convergence en loi d'une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires vers une variable aléatoire X.

Une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires converge en loi vers X si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout réel x où F_X est continue.

Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Caractérisation dans le cas où les X_n, $n \in \mathbf{N}^*$ et X prennent leurs valeurs dans $\mathbf{Z}$.

$(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \quad \lim_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = P([X = k]).$$

Résultat admis.

Application à la convergence d'une suite de variables aléatoires suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

On observera sur des exemples la convergence en loi d'une chaîne de Markov (dont le graphe sous-jacent est complet) vers la loi décrite par son état stable.

Théorème limite central.	Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance σ^2 non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites $\overline{X}_n^* = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right)$ associées aux variables $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. D'où, on a pour tout (a, b) tel que $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$: $\lim\limits_{n\to+\infty} P([a \leqslant \overline{X}_n^* \leqslant b]) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$. Résultats admis.
Exemples d'approximations de la loi binomiale et de la loi de Poisson par la loi normale.	Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

5 - Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire réelle X qui lui est liée, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée et appartient à une famille de lois dépendant d'un paramètre θ décrivant un sous-ensemble Θ de $\mathbf{R}$ (éventuellement de $\mathbf{R}^2$). Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Le problème de l'estimation consiste alors à estimer la valeur du paramètre θ ou de $g(\theta)$ (fonction à valeurs réelles du paramètre θ), c'est-à-dire à en obtenir une valeur approchée, à partir d'un échantillon de données $x_1, \ldots, x_n$ obtenues en observant n fois le phénomène. Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue...

On supposera que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ muni d'une famille de probabilités $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$. Les $X_1, \ldots, X_n$ seront supposées P_θ-indépendantes et de même loi que X pour tout θ.

On appellera estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire réelle de la forme $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ où φ est une fonction de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, éventuellement dépendante de n, et indépendante de θ, dont la réalisation après expérience est envisagée comme estimation de $g(\theta)$.

Un estimateur se définit donc de l'intention de fournir une estimation. Cette intention est garantie le plus souvent par un résultat de convergence probabiliste (lorsque n tend vers $+\infty$) vers le paramètre à estimer (convergence de l'estimateur). Ceci sort des objectifs du programme mais pourra être commenté sur les exemples proposés.

Si T_n est un estimateur, on notera, lorsque ces valeurs existent, $E_\theta(T_n)$ l'espérance de T_n et $V_\theta(T_n)$ la variance de T_n, pour la probabilité P_θ.

a) Estimation ponctuelle

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ où $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un estimateur de $g(\theta)$ et $(x_1, \dots, x_n)$ est une réalisation de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi que X.	Exemples de n-échantillons associés à une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$ avec $\theta = p$.
Définition d'un estimateur.	Un estimateur de $g(\theta)$ est une variable aléatoire de la forme $T_n = \varphi(X_1, \dots, X_n)$. La réalisation $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ de l'estimateur T_n est l'estimation de $g(\theta)$. Cette estimation ne dépend que de l'échantillon $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ observé.
Exemples simples d'estimateurs.	Exemple de la moyenne empirique $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$. Estimateur du maximum de vraisemblance : on ne fera pas de développement théorique, mais on en expliquera le principe et on l'instanciera sur les lois de Bernoulli et de Poisson. ▶

b) Estimation par intervalle de confiance

La démarche de l'estimation par intervalle de confiance consiste à trouver un intervalle aléatoire qui contienne θ avec une probabilité minimale donnée. On ne considère dans ce paragraphe que des intervalles de confiance de l'espérance mathématique m faisant intervenir l'estimateur $\overline{X}_n$. Ce paragraphe ne doit pas faire l'objet d'un exposé théorique.

Recherche d'un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1 - \alpha$ à partir de $\overline{X_n}$ et à l'aide de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.	▶
Estimation par intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale dont l'écart type est connu.	On pourra utiliser cet exemple pour introduire la variance empirique $\overline{S}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{n}$. ▶
Intervalle de confiance asymptotique : $P\left(\left[\overline{X}_n - t_\alpha \dfrac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + t_\alpha \dfrac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}}\right]\right) \underset{n \to +\infty}{\to} 1 - \alpha$ où t_α est le quantile d'ordre $1 - \dfrac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$	Ce résultat est une conséquence direct du théorème limite central. Il n'est pas exigible en l'état. On pourra mentionner le cas particulier $\alpha = 0,05$. ▶

ENSEIGNEMENT ANNUEL D'INFORMATIQUE ET ALGORITHMIQUE

I - Programme du troisième semestre.

1 - Bases de données

L'administration, les banques, les assurances, les secteurs de la finance utilisent des bases de données, systèmes d'informations qui stockent dans des fichiers les données nombreuses qui leur sont nécessaires. Une base de données relationnelle permet d'organiser, de stocker, de mettre à jour et d'interroger des données structurées volumineuses utilisées simultanément par différents programmes ou différents utilisateurs. Un logiciel, le système de gestion de bases de données (SGBD), est utilisé pour la gestion (lecture, écriture, cohérence, actualisation...) des fichiers dans lesquels sont stockées les données. L'accès aux données d'une base de données relationnelle s'effectue en utilisant un langage informatique qui permet de sélectionner des données spécifiées par des formules de logique, appelées requêtes d'interrogation et de mise à jour.
L'objectif est de présenter une description applicative des bases de données en langage de requêtes SQL (Structured Query Language). Il s'agit de permettre d'interroger une base présentant des données à travers plusieurs relations. On introduira les concepts à l'aide d'exemples simples issus de contextes appropriés (fichier clients, gestion des stocks, gestion du personnel ...)

Modèle relationnel : relation, attribut, domaine, clef primaire « PRIMARY KEY », clef étrangère « FOREIGN KEY », schéma relationnel.	
Vocabulaire des bases de données : table, champ, colonne, schéma de tables, enregistrements ou lignes, types de données.	On s'en tient à une notion sommaire de domaine : entier « INTEGER », chaîne « TEXT ».
Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.	Lecture d'un fichier de données simples. Notion de descripteur.
Opérateurs arithmétiques $+, -, *$.	
Opérateurs de comparaison : $=, <>, <, <=, >, >=$.	
Opérateurs logiques : « AND », « OR », « NO ».	

a) Commandes exigibles

« WHERE »	
« SELECT nom_de_champ FROM nom_de_table ».	Sélection de données dans une table.
« INSERT INTO nom_de_table ».	Insertion de données dans une table. On pourra utiliser « VALUES (élément1, élément2,...)".
« DELETE FROM nom_de_table ».	Suppression de données d'une table.
« UPDATE nom_de_ table ».	Mise à jour de données d'une table.

« SELECT* FROM nom_de_table_1 INNER JOIN nom_de_table_2 ».	Réalisation d'une jointure. On pourra ajouter une condition « ON Φ »dans le cas où Φ est une conjonction d'égalités. Aucune autre notion de jointure n'est dans ce programme.
« CREATE TABLE nom_de_table ».	Création d'une table.

b) Commandes non exigibles

On pourra utiliser par commodité la liste d'opérateurs, fonctions et commandes ci-dessous. Ce ne sont pas des attendus du programme et ils sont non exigibles.

Les opérateurs ensemblistes : union « UNION », intersection « INTERSECTION », différence « EXCEPT ».

Les opérateurs spécifiques de l'algèbre relationnelle : projection, sélection (ou restriction), renommage, produit cartésien .

Les fonctions d'agrégation : min « MIN », max « MAX », somme « SUM », moyenne « AVG », comptage « COUNT ».

Les commandes « DISTINCT », « ORDER BY »

2 - Equations et systèmes différentiels

L'objectif est d'illustrer les concepts vus dans le cours de mathématiques. On pourra dégager sur des exemples simples des notions qualitatives, mais aucune technicité n'est attendue. La discrétisation d'une équation différentielle n'est pas au programme. On pourra utiliser le solveur scipy.integrate.odeint ; la maîtrise d'un tel outil n'est pas exigible.

Représentations graphiques de trajectoires.	Sur des exemples en lien avec le programme : Interprétation des paramètres. Influence des conditions initiales. On observera le phénomène de convergence vers un équilibre.

3 - Statistiques descriptives bivariées

Série statistique à deux variables, nuage de points associé. Point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$ du nuage. Covariance empirique, cœfficient de corrélation empirique, droites de régression.	On tracera le nuage de points et les droites. de régression et on pourra effectuer des prétransformations pour se ramener au cas linéaire. On distinguera les variables explicatives des variables à expliquer.

II - **Programme du quatrième semestre.**

1 - Chaînes de Markov

Ce thème sera l'occasion de revoir les simulations de lois discrètes, de revisiter les notions de programmation et de représentation de données par un graphe fini, qui sont vues en première année, ainsi que d'appliquer les résultats et techniques d'algèbre linéaire étudiés au troisième semestre.

Matrice de transition. Étude sur des exemples simples. Etat stable. Comportement limite.	On pourra étudier par exemple l'indice de popularité d'une page Web (PageRank), modéliser l'évolution d'une société (passage d'individus d'une classe sociale à une autre), ou les systèmes de bonus-malus en assurances. Simulation et mise en évidence d'états stables. On observera la convergence en loi d'une chaîne de Markov (sur un graphe complet) vers son état stable.

2 - Estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance

Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.	On pourra utiliser des données issues de situations réelles (simple comparaison de valeurs numériques) ou créer plusieurs jeux de données par simulation. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.
Intervalle de confiance asymptotique obtenu avec le théorème limite central pour estimer le paramètre d'une loi de Bernoulli.	Résultat admis On pourra comparer, en majorant $p(1-p)$ par $\frac{1}{4}$, les intervalles de confiance obtenus par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et les intervalles de confiance asymptotiques obtenus par l'approximation de la loi binomiale par la loi normale. La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.