TP : Loi normale et loi de Poisson.

12 février 2025

1 Loi normale.

On simule N variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite. On trace l'histogramme empirique et la fonction de répartition empirique, on les compare à la densité théorique $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Exercice 1 : Loi normale via `rd.normal`

Compléter les lignes manquantes du programme `loi_normale_a_trou` pour qu'il simule N variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite en utilisant `rd.normal`(μ, σ, N) avec μ qui est l'espérance, σ qui est l'écart-type et N la taille de l'échantillon et qu'il affiche l'histogramme empirique et la densité ϕ sur l'intervalle $[-5; 5]$.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def phi(x):
    return ....
x = np.linspace(-5,5,50)
plt.close()
plt.plot(x,phi(x))
N = 10000
X = ....
plt.hist(X,range=(-5,5),bins=50,density=True)
plt.show()
```

Exercice 2 :Loi normale via TLC

On rappelle le théorème central limite.

Théorème 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance $\sigma > 0$ et une espérance m.
Si on pose $\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\bar{X}_n^*$ la variable aléatoire centrée réduite associée à $\bar{X}_n$
alors la suite $(\bar{X}_n^*)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée

réduite.

Partie 1 bis : Sans aide

Simuler 1000 fois une loi Binomiale $\mathcal{B}(40, \frac{1}{2})$ et représenter son histogramme empirique et une densité d'une loi normale $\mathcal{N}(20, 10)$.

Partie 1 bis : Illustration avec des lois de Bernoulli.

1. Soit $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. Quelle est la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$?
2. Exprimer $\bar{X}_n^*$ en fonction de S_n et p.
3. Compléter le programme suivant puis l'insérer à l'emplacement des lignes 11 et 12 du programme `loi_normale_a_trou.py` afin de simuler une loi normale à partir de la somme de 20 lois de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.

```
n = 20; p = 0.5
S = ....
X = ....
I = np.linspace(-1/2,n+1/2,n)
L = (I-n*p)/np.sqrt(n*p*(1-p))
plt.hist(X, bins=L, density=True)
```

4. Que se passe-t-il si on augmente n ?

Partie 2 : Illustration avec douze uniformes.

Soit $U_1, \cdots, U_{12}$ des variables aléatoires à densité indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $\bar{X} = \dfrac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} U_i$.

1. Que vaut $\bar{X}^*$, variable aléatoire centrée réduite associée à $\bar{X}$?
2. Écrire à l'emplacement des lignes 10 et 11 du programme `loi_normale_a_trou` les instructions permettant de simuler une loi normale à partir de la somme de 12 lois uniformes.

Remarque 1

On rappelle que :

- *L'option* `size=[n,m]` *dans* `rd.random` *permet de créer une matrice à n lignes et m colonnes de simulations de la loi uniforme sur $[0, 1]$.*
- *L'instruction* `np.sum(M)` *permet d'additionner tous les éléments d'une matrice M. L'option* `axis=0` *permet d'additionner par colonnes.*
- *Ainsi si M est une matrice (n, m) alors* `np.sum(M,axis=0)` *est une matrice ligne à m colonnes dont chaque coefficient est la somme de la colonne correspondante dans M.*

Loi de Poisson.

Exercice 3

On s'intéresse au nombre N de personnes qui se présentent à la caisse d'une supérette sur une période $[0, \lambda]$ donnée. On pose $T_0 = 0$ et on note T_1, T_2, etc. les instants où se présentent les clients

n°1, n°2, etc. On suppose que l'intervalle de temps séparant l'arrivée de deux clients suit une loi exponentielle de paramètre 1.
Ainsi, les variables aléatoires $X_1 = T_1$, $X_2 = T_2 - T_1$ et plus généralement, pour tout $i \geq 0$, $X_i = T_i - T_{i-1}$ suivent des lois $\mathcal{E}(1)$.

1. Décrire $N(\Omega)$.
2. Il est bien clair que $N = 0$ ssi $T_1 > \lambda$. En déduire $\mathbb{P}(N = 0)$.
3. (a) Rappeler la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (b) Montrer que pour tout entier n on a :
$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} e^{\lambda - t} \frac{t^n}{n!} dt.$$
   (c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(S_{n+1} \leq \lambda)$.
4. Justifier que $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
5. Compléter le programme `loi_poisson_a_trou`suivant afin qu'il simule une loi de Poisson de paramètre λ et qu'il affiche les histogrammes théoriques et empiriques.

```
# Importation de bibliotheques

import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

# Loi de poisson theorique

l = 3
n = int(3*l)+1
Xt = np.zeros(n+1)
for k in range(n+1):
    Xt[k] = ...

plt.close()

# Histograme theorique

plt.subplot(2,1,1)
plt.bar(range(n+1),Xt,width=0.5,color='red')
plt.title("histogramme theorique")

# Histogramme empirique

N=10000
T = np.zeros(N)
for i in range(N):
    x=rd.exponential(1)
    j=1
    while .... :
        x = ...
        j=j+1
    T[i]=j
plt.subplot(2,1,2)
plt.hist(T-1,range=(0,n+1),bins=n+1,color='y',edgecolor='r',density=True)
plt.title("histogramme empirique")
plt.show()
```