TP 11: La méthode de Monte-Carlo.

28 février 2025

Introduction.

La méthode de Monte-Carlo a été développée à Los Alamos par John VON NEUMANN, Stanislaw ULAM et Enrico FERMI dans les années 1940-1950 dans le cadre du projet Manatthan. Elle permet aujourd'hui de résoudre beaucoup de problèmes dans de nombreuses branches des mathématiques (calcul d'intégrales, résolution d'équations différentielles, recherches de minimas, test de primalité) et d'algorithmique (recherche d'algorithmes optimaux comme dans le programme AlphaGo de Google).
On appelle méthode de Monte-Carlo toute méthode de calcul numérique consistant à représenter la valeur qu'on cherche à calculer sous forme d'espérance d'une certaine variable aléatoire que l'on sait simuler et à estimer cette espérance par simulation. Historiquement, le premier exemple est du à Georges-Louis compte de BUFFON, qui a proposé en 1777 une méthode de calcul de π en faisant des jets successifs d'une aiguille sur des lames de parquet.

Position du problème.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ et $I = \int_a^b f(t)dt$ que l'on suppose absolument convergente. On cherche à mettre en place une méthode probabiliste de calcul de I.

Premier point de vue - loi uniforme.

1. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$. Montrer que $I = (b-a)\mathbb{E}(f(U))$.
   On en déduit que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées de loi $\mathcal{U}([a, b])$ et si $\bar{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i)$ alors $(b-a)\bar{X_n}$ est un estimateur de I.
2. Compléter le programme suivant pour qu'il calcule une valeur approchée de $\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$ par cette méthode.

```
def f(x):
        return ...
U = rd.random(size=1000)
X = ...
print(.....)
```

Deuxième point de vue - loi quelconque.

Soit f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. L'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$. est égale par théorème de transfert à $\mathbb{E}(g(X))$ (sous réserve d'existence).
Dès lors, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X alors $Y_n = \sum_{i=1}^{n} g(X_i)$ est un estimateur sans biais de I.

1. Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-2t}dt$ par cette méthode.
2. Écrire de même un programme qui calcule une valeur approchée de $\int_0^1 \sqrt{t}e^{-t}dt$ par cette méthode.

Troisième point de vue (méthode avec rejet).

Supposons que la fonction f est bornée sur $[a, b]$ et qu'elle est à valeurs positives. Soit M son maximum sur $[a, b]$. On prend un point au hasard dans le rectangle $[a, b] \times [0, M]$. L'événement A : "le point est sous la courbe de f" a pour probabilité le rapport entre I et la surface du rectangle. Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de $\ln(2)$ selon cette méthode.
De manière générale, cette méthode permet de calculer une valeur approchée de n'inporte quelle surface dans le plan.

Exercices.

Exercice 1 : HEC 2015 - Eco.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \exp(-e^{-x})$.
On admet que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité T.

1. Déterminer un densité de T.
2. Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi exponentielle de paramètre 1 et $Z = -\ln(X)$.
   Montrer que Z et T suivent la même loi.
3. Proposer une commande pour simuler la loi de T.
4. Établir l'existence de $\mathbb{E}(T)$. Justifier que $\mathbb{E}(T) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.
5. Écrire les commandes qui permettent de renvoyer une valeur approchée de $\mathbb{E}(T)$.On proposera deux méthodes. L'une utilisant la question 3 l'autre utilisant la question 4.

0.1 Exercice 2.

Soit $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}|\cos(x)|dx$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que I peut s'exprimer à l'aide de l'espérance d'une variable aléatoire fonction de X.
3. Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de I par application de la méthode de Monte-Carlo.

Exercice 3 : Edhec 2017.

1. Soit x un réel quelconque. Montrer que pour tout entier naturel k l'intégrale $I_k(x) = \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge.
2. Montrer par récurrence que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}.$$
3. Écrire une fonction `I(k,x)` qui qui prend en entrée un entier naturel k et un réel x et qui renvoie la valeur de $I_k(x)$.
4. Montrer par un changement de variable que : $I_k = e^{-x} \int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-u} du$.
   En déduire les instructions qui permettent de calculer une valeur approchée de I_k par la méthode de Monte-Carlo.

Exercice 4 : Edhec 2015.

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite. On note $Y = |X|$. On note F_Y sa fonction de répartition.

1. Exprimer pour tout réel x positif $F_Y(x)$ en fonction de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y.
2. On pose $g(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}}$ si $x \geqslant 0$ et $g(x) = 0$ si $x < 0$. On admet que g est une densité de probabilité. Soit Z une variable aléatoire de densité g.
   (a) On pose $T = \sqrt{2Z}$ on admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de celle de Z en déduire une densité de T et vérifier que T et Y suivent la même loi.
   (b) Proposer une commande Python pour simuler la variable aléatoire Z.
   (c) En remarquant que pour tout réel x positif on a $x^2 g(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x}$ montrer que le programme suivant permet de calculer une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx$.

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
n = 1000
w = rd.exponential(1,size=n)
s = np.sum(w*np.sqrt(w))/n/np.sqrt(np.pi)
```

0.2 Exercice 5.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Pour $t > 0$ on cherche à estimer la probabilité :
$$p(t) = \mathbb{P}(X \in [t, t+1])$$

1. Estimer $p(t)$ par la méthode classique (loi des grands nombres) vue au TP 10. On affichera l'écart-type empirique de notre estimateur.

```python
X = np.normal(0,1,size=N)
Y = np.zeros(N)
for i in range(N)
    if ..... :
        Y[i] = ...
    else:
        ....
print('estimation:',np.mean(Y))
print('ecart-type:',...)
```

2. Pour $t > 2$ la probabilité $p(t)$ étant très faible, la précision relative est très faible (c'est à dire que l'erreur relative $\frac{\sigma(t)}{p(t)}$ est très importante).
   (a) Justifier que $p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{t+1} e^{-x^2/2} dx$.
   (b) En faisant le changement de variable $u = x - t$ justifier que
   $$p(t) = e^{-t^2/2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ut} e^{-u^2/2} du.$$
   (c) Estimer $p(t)$ par la méthode de Monte-Carlo.