TP 7: Simulation de lois continues par la méthode d'inversion.

28 octobre 2025

Soit X une variable aléatoire continue. Comme d'habitude, les données empiriques s'obtiennent en simulant un grand nombre de fois l'expérience. La simulation va produire une série statistique que l'on va mémoriser sous la forme d'une matrice ligne `[X[0],X[1],...,X[999]]` chacun des `X[i]` représentant la valeur de X lors de la i-ème occurence de l'expérience. L'histogramme empirique s'obtient de la même manière qu'au TP n°6. On le compare cette fois à la densité. On utilisera Capytale avec le code suivant : 8da0-7763323

Exercice 1

Compléter le programme de l'exercie 1 sur Capytale de telle sorte qu'il simule avec `rd.exponential()` 10000 *fois une loi exponentielle de paramètre a et qu'il affiche sur un même graphe l'histogramme empirique et la densité. On se placera sur l'intervalle* $[0, 3/a]$.

1 Méthode d'inversion.

On considère une variable aléatoire X à densité et on suppose que sa fonction de répartition F réalise une bijection d'un intervalle $]a, b[$ contenu dans $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $]0, 1[$.
La méthode d'inversion énonce que si U suit une loi uniforme sur $]0, 1[$ alors $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.
Il suffit donc pour simuler X de simuler une loi uniforme sur $]0, 1[$ (par `U=rd.random(N)`) et de faire $F^{-1}(U)$.
Dans la pratique, les énoncés du concours ne parlent pas de la méthode d'inversion et la font redémontrer comme dans l'exemple suivant.

Exercice 2 (*Simulation d'une loi exponentielle*)

1. *Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$. On pose :*

$$X = -\ln(1 - U).$$

   (a) *Déterminer la fonction de répartition de X.*

   (b) *En déduire la loi de X.*

2. *Modifier le programme de l'exercice 1 pour qu'il simule* 10000 *fois une loi exponentielle de paramètre* 1 *par la méthode d'inversion et qui affiche sur un même graphe l'histogramme empirique et la densité d'une telle loi sur l'intervalle* $[0, 3]$.

2 Application sur des exercices type concours.

Les exercices 3 et 4 sont globalement tombés l'année dernière à EMLYON.

Exercice 3 (*Loi de Cauchy.*)

1. *Déterminer le réel k de telle sorte que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{k}{1+x^2}$ soit une densité de probabilité.*
   On dit qu'une variable aléatoire réelle de densité f suit la loi de Cauchy.
2. *Soit X une variable aléatoire ayant f comme densité. Déterminer la fonction de répartition de X.*
3. *Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0,1[$, montrer que la variable aléatoire $Y = \tan\left(\pi\left(U - \dfrac{1}{2}\right)\right)$ suit la même loi que X.*
4. *Écrire un programme qui simule 10000 fois une loi de Cauchy. et qui affiche sur un même graphe l'histogramme empirique et la densité d'une telle loi sur l'intervalle $[-10, 10]$.*

Exercice 4 (*Espérance d'une loi de Cauchy.*)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy. X admet-elle une espérance ?
Pour illustrer ce phénomène on propose le programme donné sous Capytale. Expliquer le principe de ce programme puis interpréter les résultats observés lors de son exécution.

Exercice 5 (*D'après Ecricome 2019 - E*)

On pose : $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ si $x \geqslant 1$ et $f(x) = 0$ si $x < 1$.

1. *Montrer que f est une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire ayant f comme densité.*
2. (a) *Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0;1[$ et $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.*
   Montrer que V et X suivent la même loi.

   (b) *Ecrire un script qui permet de simuler la variable aléatoire X.*
3. *Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité et T la variable aléatoire définie par : $T = DX$.*

   (a) *Ecrire une fonction d'en-tête* `def D(n)` *qui prend un entier $n \geqslant 1$ en entrée et qui renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable D.*

   (b) *On considère la fonction suivante Pour n assez grand que représente la valeur renvoyée ?*

```
def f(n):
        a = D(n)
        b = rd.random(size=n)
        c = a / np.sqrt(1-b)
 return np.sum(c)/n
```