Polyn. de Bernstein DM 1 2024/25

I 1. a) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$

b) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} E(X)$ avec $X \hookrightarrow B(n,x)$

$= \frac{1}{n} n x = x$.

2. $\frac{x(1-x)}{n} f_n'(x) = \frac{x(1-x)}{n} \Big[\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1}\right)$

$+ f(0)(-n)(1-x)^{n-1} + f(1) n x^{n-1} \Big]$

Les 2 termes isolés rentrent dans la somme car pour $k=0$ ou $k=n$ on a bien un seul terme (annulation du k ou du $n-k$)

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n-k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) x^{k+1} (1-x)^{n-k}$

$= (1-x) g_n(x) - x\left(f_n(x) - g_n(x)\right) = g_n(x) - x f_n(x)$

3. a) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2} E(X^2)$ si $X \hookrightarrow B(n,x)$.

$= \frac{1}{n^2}\left(V(X) + E(X)^2\right) = \frac{1}{n^2}\left(nx(1-x) + x^2 n^2\right) = \frac{1}{n} x + x^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ (*)

b) $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n} x + x^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) - x^2\right| = \frac{1}{n}|x(1-x)| \leq \frac{1}{4n}$ (cf étude de $x \mapsto x(1-x)$)

Donc $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4n}$ (majorant atteint en $\frac{1}{2}$)

clairement $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{4n} = 0$ donc

4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{k^2}{n^2} - \frac{2k}{n} x + x^2\right) x^k (1-x)^{n-k}$

$= \frac{1}{n} x + x^2\left(\cancel{1} - \frac{1}{n}\right) - 2\cancel{x}\, x + \cancel{x^2} \cdot 1$ avec les 3 "f_n" calculés en 1a), b) 3a)

$= \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n} = \frac{x(1-x)}{n}$.

(*) Remarque : on peut aussi considérer que $x^2 = x \cdot x$ avec $f(x) = x$ et utiliser la 2. $f_n(x) = x$ et $g_n(x) = \frac{x(1-x)}{n} \times 1 + x \times x = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$.

II 1. $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{\frac{k}{n}} x^k (1-x)^{n-k} = \left(x e^{1/n} + 1 - x\right)^n$ par le binôme.

$= \left(x\left(e^{1/n} - 1\right) + 1\right)^n$

2. $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \exp\left(n \ln\left(1 + x\left(e^{1/n} - 1\right)\right)\right)$

avec $e^{1/n} - 1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $1 + x\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 1 + \frac{x}{n} + \frac{x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et $n \ln\left(1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = n\left(\frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim x$ si $x \neq 0$.

donc $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = e^x$ par composition de limite.

Si $x = 0$ $f_n(0) = 1 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$ et on a $1 = e^0$.

Finalement $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^x$.

Rque : on peut se contenter d'un DL_1 à condition d'exclure le cas $x=0$ dès le début,

3. a) $\ln\left(x(\exp(u)-1)+1\right) = \ln\left(x\left(u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)+1\right)$

$= x\left(u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) - \frac{x^2}{2}\left(u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)\right)^2$

$= xu + x\frac{u^2}{2} - \frac{x^2}{2}u^2 + o(u^2) = xu + \frac{x}{2}(1-x)u^2 + o(u^2)$

ou T.Y appliqué à $\varphi(u)$

$\varphi'(u) = \frac{xe^u}{xe^u+a}$ avec $a = 1-x$

$\varphi''(u) = \frac{xe^u a}{(xe^u+a)^2}$ d'où le résultat par TY.

b) $f_n(x) - e^x = \left(x\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)+1\right)^n - e^x = \exp\left(n \underbrace{\ln\left(x\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)+1\right)}_{\frac{x}{n} + \frac{x}{2}(1-x)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) - e^x$

$= \exp\left(x + \frac{x}{2n}(1-x) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - e^x$

$= e^x\left(e^{\frac{x(1-x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \sim e^x \frac{x(1-x)}{2n}$

4. $\varphi(x) = n\ln\left(x\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)+1\right) - x$ sur $[0,1]$

On a $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$.

φ est continue, dérivable sur $]0,1[$ et $\varphi'(x) = n\frac{e^{1/n}-1}{x(e^{1/n}-1)+1} - 1$

soit $\varphi'(x) = \frac{n(e^{1/n}-1) - x(e^{1/n}-1) - 1}{x(e^{1/n}-1)+1}$

$\varphi''(x) = -n\left(e^{1/n}-1\right)\frac{1}{\left(x(e^{1/n}-1)+1\right)^2} < 0$ donc φ' est monotone décroissante stricte

Par le th de Rolle appliqué à φ sur $[0,1]$ on a l'unicité du zéro de φ sur $[0,1]$.

Soit $x_n \in]0,1[$ tq $\varphi'(x_n) = 0$ alors

	0	x_n	1
φ''	$-$		$-$
φ'	$\searrow$	0	$\searrow$
φ	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

5. $f_n(x) = \exp\left(n\ln\left(x\left(e^{1/n}-1\right)+1\right)\right) = \exp\left(\varphi(x)+x\right)$ avec $0 \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_n)$ $\forall x \in [0,1]$

Soit $e^x \leq f_n(x) \leq e^x e^{\varphi(x_n)}$ donc $f_n(x) - e^x = |f_n(x) - e^x| \leq e^x\left(e^{\varphi(x_n)}-1\right)$

et $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x) - e^x| \leq \sup\limits_{x \in [0,1]} \left|e^x\left(e^{\varphi(x_n)}-1\right)\right| \leq e\left(\exp(\varphi(x_n))-1\right)$

6. $\exp(u) - 1 = u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, $\varphi(x_n) = n\ln\left(\underbrace{x_n\left(e^{1/n}-1\right)+1}_{}\right) - x_n = n + \frac{1}{2} + o(1) - x_n$.

$x_n \in [0,1]$

$= n\left(e^{1/n}-1\right) = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

sachant que par définition $n - x_n = \frac{1}{e^{1/n} [illegible]} = n - \frac{n}{[illegible]} \longrightarrow 1$ donc $\varphi(x_n) \to 0$