TP 5: Expériences aléatoires.

5 juillet 2023

Exercice 1 : Ecricome 2022 E

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés 1, 2, 3, 4, ...
On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.
Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton. On rappelle qu'en Python la commande `rd.randint(a,b)` de la bibliothèque `numpy.random` renvoie entier aléatoire la réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[\![a, b-1]\!]$.
Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle simule le placement des jetons jusqu'au moment où chaque urne contient au moins un jeton, et pour qu'elle renvoie la valeur prise par la variable aléatoire T.

```
import numpy.random as rd
def T()
    X = 0
    Y = 0
    Z = 0
    n = 0
    liste = [X, Y, Z]
    while ......
        i = rd.randint(0,3)
        liste[i] = ....
        n = n+1
    return ...
```

Exercice 2 : Ecricome 2021 E

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule les lancers successifs d'une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention de deux piles consécutifs et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
def simul_X():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile ...
        if rd.random() < 1/2 :
            pile =
        else :
            pile = ...
        tirs = ...
        return .........
```

2. Ecrire une fonction d'en-tête `def moyenne(n)` qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
3. Que pouvez-vous conjecturer sur l'espérance de la variable aléatoire X égale au nombre de lancers effectués lorsque l'on obtient pour la première fois deux piles consécutifs ?

Exercice 3 :D'après Edhec 2020 E

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dispose de deux urnes, l'urne U contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaitre la loi de X.
2. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Reconnître la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X = k)$.
3. Compléter le script suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = int(input("n?"))
p = int(input("p?"))
X = ...
Y = ...
```

Exercice 4 :D'après Edhec 2015 - S

Soit α et p deux réels de $[0,1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une succession de manches. Avant chaque manche, y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié et c'est définitif). Dans le cas contraire il est autorisé à participer (indépendamment du résultat de la manche précédente). A chaque manche jouée, le joueur gagne 1 euro avec la probabilité p et perd 1 euro avec la probabilité $1-p$.
On note X le nombre de manches jouées avant que le joueur soit disqualifié, Y le nombre de manches gagnées et G le gain du joueur à la fin du jeu.

1. Que représente la variable aléatoire $T = X + 1$? Reconnaître la loi de T .
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de Y conditionnée par l'événement $(X = n)$.

3. Compléter la fonction suivante afin qu'elle permette de simuler 10000 fois notre expérience et qu'il affiche une valeur approchée de $E(Y)$.

```
def esperance(alpha,p):
    N = 10000
    T = ...
    X = ...
    Y = np.zeros(N)
    for i in range(N):
        Y[i] = ...
    return np.mean(Y)
```

Exercice 5 :D'après Ecricome 2018 - voie S

Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes de la variable N.

On définit alors la variable aléatoire S ainsi : $S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{n} X_k & \text{si } N \geq 1 \end{cases}$.

1. On considère la fonction suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k. Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

```
def simulX(n):
    y = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() < 1/2 :
            y = y + 1
    return y
```

2. Écrire une fonction d'en-tête `def simulS(lambda,n)` qui permet de simuler la variable aléatoire S.