Exercices défis

Exercice 1

Dans cet exercice, on donnera les réponses, le cas échéant, soit sous forme fractionnaire, soit sous forme décimale, <u>au choix</u>.

1. On donne $n=100$, $p=0,05$ et $q=1-p$.

Calculer : $E_1=np$, $V_1=npq$, $E_2=90E_1+500$ et $V_2=90^2V_1$.

2. On donne $p=0,2$ et $q=1-p$.

Calculer : $E_3=\dfrac{1}{p}$, $V_3=\dfrac{1-p}{p^2}$, $F_3=E_3+V_3^2$, $E_4=\dfrac{1}{q}$, $V_4=\dfrac{1-q}{q^2}$, $F_4=E_4+V_4^2$,

$E_5=0,8E_3+0,2E_4$, $F_5=0,8F_3+0,2F_4$ et enfin $V_5=F_5-E_5^2$.

Exercice 2

Soit $p\in\left]0;1\right[$ et $q=1-p$.

Démontrer que : $p^2q^{-2}\left(\dfrac{1}{1-q^2}-1\right)=\dfrac{p}{1+q}$.

Exercice 3

1. Factoriser x^n-x^{n+1} puis $x^{n-2}-x^n$.

2. Simplifier après avoir réduit au même dénominateur les expressions suivantes :

$A=1-\dfrac{1}{x^n+1}$ et $B=\dfrac{1}{x^n+1}-\left(1-x^n\right)$.

3. On donne $E=\dfrac{na}{n+1}$ et $F=\dfrac{na^2}{n+2}$.

Calculer $b=E-a$, $V=F-E^2$ puis $r=V+b^2$.

Exercice 4

Soit la suite définie pour tout *n* de **N** par : $\begin{cases} I_0=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ I_{n+1}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}+\left(n+1\right)I_n \end{cases}$.

Calculer I_1, I_2, I_3 puis $K=-I_3+2I_2-I_1$.

Exercice 5

1. Calculer $200\times\frac{2}{5}$ puis $200\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$.

2. Calculer $\left(\frac{7}{15}\right)^2$ puis $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}$.

3. Simplifier : $\left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^k}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}\right)$.

4. Calculer $\frac{8}{15}+\frac{1}{5}\times\frac{5}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{5}}-1-\frac{2}{5}\right)$.

5. Simplifier : $\frac{3^n\left[(-1)^{n+1}-(-1)^n\right]}{6^n}+\frac{(-1)^{n+1}+(-1)^{n-1}}{(-1)^n}$.

Exercice 6

On considère x et y deux réels positifs tels que $x<y$ et les quotients : $A=\frac{x}{x+1}$ et $B=\frac{y}{y+1}$.

Déterminer le signe de $A-B$.

Exercice 7

1. Démontrer que pour tous réels a, b et c on a : $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

2. Soient x, y et z des réels non nuls tels que : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

a) Montrer que $xy+yz+zx=0$.

b) En déduire que le carré de la somme de ces trois nombres x, y et z est égal à la somme de leurs carrés. Vérifier avec $x=-2$, $y=3$ et $z=6$.

Exercice 8

1. On considère a et b deux nombres strictement positifs et m et h les nombres définis par : $m=\dfrac{a+b}{2}$ et $h=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$. Démontrer que $m-h=\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}$.

2. Factoriser :

a) $(x+1)^2-(x+1)$. **b)** $(x+1)^2-2x-2$. **c)** $(x+1)^2-4$.

d) $(x+1)^2-x^2$. **e)** $x^{n+1}-x^n$. **f)** $(x+1)^2-4x$.

3. Calculer : $\dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{x+2}+\dfrac{x}{\dfrac{x+1}{x+2}}-\dfrac{\dfrac{x^4}{x+1}}{\dfrac{x}{x+2}}-2x\times\dfrac{2}{x}$.

Exercices d'approfondissement « Fonctions »

Exercice 1

On considère la fonction *f* définie, pour tout réel *x* de $[0\,;+\infty[$, par la relation : $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

1. **(a)** On note f' la dérivée de *f*. Calculer, pour tout réel *x* positif, $f'(x)$.

(b) Étudier, suivant les valeurs de *x*, le signe de $f'(x)$.

(c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand *x* tend vers $+\infty$.

(d) Dresser le tableau de variation de *f*.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=1$ et la relation : pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

2. **(a)** Calculer u_1 et u_2.

Exercice 2

On considère la fonction *f* définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\forall x\in[1\,;+\infty[,\qquad f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$$

On note C_f sa courbe représentative. On définit également la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$u_0\in[1\,;+\infty[,\qquad \forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=f(u_n)$$

1. <u>Étude de $(u_n)_{n\geq 0}$.</u>

(a) Soit $x\geq 1$. Établir les inégalités suivantes : $1\leq f(x)$ et $f(x)\leq\dfrac{x+1}{2}$.

(b) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 1\leq u_n$.

En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}\leq\dfrac{u_n+1}{2}$.

(c) Prouver par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\qquad 1\leq u_n\leq 1+\dfrac{1}{2^n}(u_0-1)$.

(d) Démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et donner la valeur de sa limite.

2. Asymptote à C_f. On pose $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$.

(a) Donner la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Calculer *a* et *b*.

(c) Montrer qu'il existe un réel *c* tel que :

$$\forall x\in[1\,;+\infty[,\qquad f(x)-ax-b=\frac{c}{2x-1}$$

et donner la valeur de *c*.

(d) Prouver que C_f admet une asymptote (D) dont on donnera une équation ainsi que la position de (D) par rapport à C_f.

3. Variations de *f*.

(a) Soit $x\in[1\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$.

(b) Préciser le sens de variation de *f* sur $[1\,;+\infty[$.

(c) Tracer la courbe C_f ainsi que la droite (D) et la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 1.

4. Étude d'une réciproque.

(a) Montrer que la fonction *f* réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $[1\,;+\infty[$.

(b) Soit $t\in[1\,;+\infty[$. Prouver que l'équation $x^2-2tx+t=0$ (d'inconnue *x*) admet des solutions réelles et les donner.

(c) Soit $t\in[1\,;+\infty[$. Déterminer l'unique réel $x\in[1\,;+\infty[$ tel que $f(x)=t$.

Exercice 3

1. **(a)** Étudier le signe du quotient $\dfrac{1+x}{1-x}$ suivant les valeurs du réel *x*.

(b) Résoudre $\dfrac{1+x}{1-x}>0$.

2. On considère une fonction φ définie sur $]-1,\ 1[$ et on admet que sa dérivée est $\varphi'(x)=2\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

(a) En déduire le tableau de variation de φ.

(b) Calculer la dérivée seconde de φ sur $]-1,\ 1[$.

(c) En déduire que : $\forall x\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right],\ 0\le\varphi'(x)\le\dfrac{2}{3}$.

Exercice 4

1. Justifier que l'équation $x^2+x+1=0$, d'inconnue réelle *x*, n'admet aucune solution.

On considère alors la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de *f*.

2. Déterminer les limites de *f* en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de *f*.

On remarquera en particulier que *f* est croissante sur l'intervalle $[-1;1]$.

4. **(a)** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

(b) Montrer que pour tout réel *x* de $[-1\,;+\infty[$, on a : $f(x)\leq x$.

Donner une interprétation graphique de ce résultat.

5. Tracer l'allure de $(\mathcal{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé.

On soignera en particulier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T).

Exercice 5

Soit *g* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-\ln(x)$.

1. **a)** Montrer que la dérivée de *g* vérifie pour tout réel $x>0$ l'égalité : $g'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

b) Calculer $g(1)$.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$.

d) Dresser le tableau des variations de *g* sur $]0;+\infty[$ en y faisant figurer les résultats obtenus aux questions **1.b)** et **1.c)**.

e) Justifier que pour tout réel $x>0$ on a : $g(x)>0$.

2. Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{x-\ln(x)}$.

a) Montrer que pour tout réel $x>0$ on a : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x\left(x-\ln(x)\right)^2}$.

b) Déduire de **1.c)** les limites de $f(x)$ lorsque *x* tend vers 0 et $+\infty$.

c) Dresser le tableau des variations de *f* sur $]0;+\infty[$. On y fera figurer les limites obtenues à la question **2.b)** ainsi que $f(1)$.

3. On cherche à résoudre l'équation $f(x)=x$ dans $]0;+\infty[$.

a) Montrer que, pour tout réel $x>0$, l'équation $f(x)=x$ est équivalente à l'équation :

$x-\ln(x)-\dfrac{1}{x}=0$.

On pose donc pour tout réel $x>0$: $h(x)=x-\ln(x)-\dfrac{1}{x}$.

b) Montrer que la dérivée de *h* vérifie pour tout réel $x>0$ l'égalité $h'(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2}$.

En déduire le sens de variation de *h* sur $]0;+\infty[$.

c) On donne : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$. Dresser le tableau des variations de *h*.

d) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

Calculer $f(1)$. En déduire la valeur de α.

4. Tracer l'allure de la représentation graphique de *f* ainsi que la droite d'équation $y=x$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 4 cm.

Exercice 6

Partie I.

Soit *g* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-4\ln(x).$$

1. Étudier le sens de variation de *g*, et vérifier que *g* admet un minimum sur $]0;+\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.

2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel *x* de $]0;+\infty[$.

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{1+\ln(x)}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm)

3. Déterminer la limite de *f* en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.

4. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

5. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y=\dfrac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

6. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de $(\mathcal{D})$.

   On montrera en particulier que $(\mathcal{D})$ coupe $(\mathcal{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.
7. Étudier le sens de variation de *f*. Dresser le tableau de variation de *f*.
8. **(a)** Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, on a $f''(x)=\dfrac{2\ln(x)-1}{x^3}$.

   (b) Étudier la convexité de *f*. La courbe $(\mathcal{C})$ possède-t-elle des points d'inflexion ?
9. On donne :

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\simeq 0,4 \qquad \sqrt{\mathrm{e}}\simeq 1,6 \qquad f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\simeq 1,3 \qquad f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)\simeq 0,1.$$

   Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$ dans un même repère orthonormé.

Partie II.

1. Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$u(x)=\left(\ln(x)\right)^2.$$

2. En déduire une fonction F telle que $F'(x)=f(x)$ puis calculer $F(\mathrm{e})-F(1)$.

Exercice 7

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **(a)** Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

   (b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.
3. **(a)** Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique $(\mathcal{D})$ dont on précisera une équation.

   (b) Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.
4. **(a)** Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.