Systèmes linéaires
Exercices

★ **Exercice 13.1**

Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=-1 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ x-y=-2 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 3x+4y=18 \\ x-2y=1 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$;

Correction : ***(si besoin)***

1.

$$\begin{cases} x+y=10 & L_1 \\ x-y=-1 & L_2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x}+y=10 & L_1 \\ 2y=11 & L_1-L_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_1-L_2 \end{array}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 9 & 2L_1-L_2 \\ \boxed{2y}=11 & L_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 9 \\ 0 & \boxed{2} & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2L_1-L_2 \\ L_2 \end{array}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{2} & L_1/2 \\ y=\dfrac{11}{2} & L_2/2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{9}{2} \\ 0 & 1 & \dfrac{11}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1/2 \\ L_2/2 \end{array}$$

(simplification)

(si besoin)

2.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 & L_1 \\ x - y = -2 & L_2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x} + 3y = -4 & L_1 \\ 5y = 0 & L_1 - 2L_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_1 - 2L_2 \end{array}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -4 & L_1 \\ y = 0 & L_2 / 5 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 / 5 \end{array}$$

(simplification)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -4 & L_1 - 3L_2 \\ \boxed{y} = 0 & L_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - 3L_2 \\ L_2 \end{array}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 & L_1 / 2 \\ y = 0 & L_2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 / 2 \\ L_2 \end{array}$$

(simplification)

(si besoin)

3.

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x+4y=18 & L_1 \\ x-2y=1 & L_2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 18 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \boxed{3x}+4y=18 & L_1 \\ \quad 10y=15 & L_1-3L_2 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{3} & 4 & 18 \\ 0 & 10 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_1-3L_2 \end{array}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3x+4y=18 & L_1 \\ \quad 2y=3 & L_2/5 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 18 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/5 \end{array}$$

(simplification)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3x \quad =12 & L_1-2L_2 \\ \quad \boxed{2y}=3 & L_2 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 12 \\ 0 & \boxed{2} & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1-2L_2 \\ L_2 \end{array}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x=4 & L_1/3 \\ y=3/2 & L_2/2 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1/3 \\ L_2/2 \end{array}$$

(simplification)

(si besoin)

4.

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x-3y=5 & L_1 \\ 3x+4y=2 & L_2 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \boxed{2x}-3y=5 & L_1 \\ \quad -17y=11 & 3L_1-2L_2 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{2} & -3 & 5 \\ 0 & -17 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ 3L_1-2L_2 \end{array}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 34x \quad =52 & 17L_1-3L_2 \\ \quad \boxed{-17y}=11 & L_2 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 34 & 0 & 52 \\ 0 & \boxed{-17} & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} 17L_1-3L_2 \\ L_2 \end{array}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x=52/34=26/17 & & L_1/34 \\ y=-11/17 & L_2/2 & L_2/-17 \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 52/34 \\ 0 & 1 & 11/-17 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1/34 \\ L_2/-17 \end{array}$$

(simplification)

★ **Exercice 13.2**

Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} 2x+3y+4z=14 \\ x+y+z=4 \\ x-y+z=2 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x+y-z=3 \\ x-2y-z=-3 \\ 3x+y-2z=7 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ x-2y-z=-5 \\ 3x+y-2z=-2 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 3x-y+2z=1 \\ x+7y-14z=1 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x+y+z+t=-4 \\ -x+y-z+t=4 \\ 8x+4y+2z+t=1 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$;

Correction :

1.

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=13 & L_1 \\ x+y+z=4 & L_2 \\ x-y+z=2 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x}+3y+4z=13 & L_1 \\ y+2z=5 & L_1-2L_2 \\ 5y+2z=9 & L_1-2L_3 \end{cases}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y+4z=13 & L_1 \\ \boxed{y}+2z=5 & L_2 \\ 8z=16 & 5L_2-L_3 \end{cases}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y+4z=13 & L_1 \\ y+2z=5 & L_2 \\ z=2 & L_3/8 \end{cases}$$

(simplification)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=5 & L_1-4L_3 \\ y=1 & L_2-2L_3 \\ \boxed{z}=2 & L_3 \end{cases}$$

(troisième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x & = 2 & L_1 - 3L_2 \\ \boxed{y} & = 1 & L_2 \\ z & = 2 & L_3 \end{cases}$$

(quatrième étape)

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x & = 1 & L_1 / 2 \\ y & = 1 & L_2 \\ z & = 2 & L_3 \end{cases}}$$

(simplification)

2.

$$\begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ x - 2y - z = -3 & L_2 \\ 3x + y - 2z = 7 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y - z = 3 & L_1 \\ 3y = 6 & L_1 - L_2 \\ 2y - z = 2 & 3L_1 - L_3 \end{cases}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ y = 2 & L_2 / 2 \\ 2y - z = 2 & L_3 \end{cases}$$

(simplification)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 3 & L_1 \\ \boxed{y} = 2 & L_2 \\ z = 2 & 2L_2 - L_3 \end{cases}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 & L_1 + L_3 \\ y = 2 & L_2 \\ \boxed{z} = 2 & L_3 \end{cases}$$

(troisième étape)

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 & L_1 - L_2 \\ \boxed{y} = 2 & L_2 \\ z = 2 & L_3 \end{cases}}$$

(quatrième étape)

3.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ x - 2y - z = -5 & L_2 \\ 3x + y - 2z = -2 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x} + y + z = 5 & L_1 \\ 5y + 3z = 15 & L_1 - 2L_2 \\ y + 7z = 19 & 3L_1 - 2L_3 \end{cases}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ \boxed{5y} + 3z = 15 & L_2 \\ -32z = -80 & L_2 - 5L_3 \end{cases}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 5 & L_1 \\ 5y + 3z = 15 & L_2 \\ 2z = 5 & L_3/(-16) \end{cases}$$

(simplification)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 5 & 2L_1 - L_3 \\ 10y = 15 & 2L_2 - 3L_3 \\ \boxed{2z} = 5 & L_3 \end{cases}$$

(troisième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20x = 10 & 5L_1 - L_2 \\ \boxed{10y} = 15 & L_2 \\ 2z = 5 & L_3 \end{cases}$$

(quatrième étape)

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} & L_1/20 \\ y = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2} & L_2/10 \\ z = \dfrac{5}{2} & L_3/2 \end{cases}}$$

(simplification)

4.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & L_1 \\ 3x - y + 2z = 1 & L_2 \\ x + 7y - 14z = 1 & L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y - 3z = 1 & L_1 \\ 7y - 11z = 2 & 3L_1 - L_2 \\ -5y + 11z = 0 & L_1 - L_3 \end{cases}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & L_1 \\ \boxed{7y} - 11z = 2 & L_2 \\ 22z = 10 & 5L_2 + 7L_3 \end{cases}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & L_1 \\ 7y - 11z = 2 & L_2 \\ 11z = 5 & L_3 / 2 \end{cases}$$

(simplification)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x + 22y = 26 & 11L_1 + 3L_3 \\ 7y = 7 & L_2 + L_3 \\ \boxed{11z} = 5 & L_3 \end{cases}$$

(troisième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x + 22y = 26 & L_1 \\ y = 1 & L_2 / 7 \\ 11z = 5 & L_3 \end{cases}$$

(simplification)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 4 & L_1 - 22L_2 \\ \boxed{y} = 1 & L_2 \\ 11z = 5 & L_3 \end{cases}$$

(quatrième étape)

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{4}{11} & L_1 / 11 \\ y = 1 & L_2 \\ z = \dfrac{5}{11} & L_3 \end{cases}}$$

(simplification)

5.

$$\begin{cases} x + y + z + t = -4 & L_1 \\ -x + y - z + t = 4 & L_2 \\ 8x + 4y + 2z + t = 1 & L_3 \\ 3x + 2y + z = 0 & L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = -4 & L_1 \\ 2y + 2t = 0 & L_1 + L_2 \\ 4y + 6z + 7t = -33 & 8L_1 - L_3 \\ y + 2z + 3t = -12 & 3L_1 - L_4 \end{cases}$$

(première étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = -4 & L_1 \\ y + t = 0 & L_2 / 2 \\ 4y + 6z + 7t = -33 & L_3 \\ y + 2z + 3t = -12 & L_4 \end{cases}$$

(simplification)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = -4 & L_1 \\ \boxed{y} + t = 0 & L_2 \\ 6z + 3t = -33 & L_3 - 4L_2 \\ 2z + 2t = -12 & L_4 - L_2 \end{cases}$$

(deuxième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = -4 & L_1 \\ y + t = 0 & L_2 \\ 2z + t = -11 & L_3 / 3 \\ z + t = -6 & L_4 / 2 \end{cases}$$

(simplification)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = -4 & L_1 \\ y + t = 0 & L_2 \\ \boxed{2z} + t = -11 & L_3 \\ t = -1 & 2L_4 - L_3 \end{cases}$$

(troisième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = -3 & L_1 - L_4 \\ y = 1 & L_2 - L_4 \\ 2z = -10 & L_3 - L_4 \\ \boxed{t} = -1 & L_4 \end{cases}$$

(quatrième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 4 & 2L_1 - L_3 \\ y = 1 & L_2 \\ \boxed{2z} = -10 & L_3 \\ t = -1 & L_4 \end{cases}$$

(cinquième étape)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 & L_1 - 2L_2 \\ \boxed{y} = 1 & L_2 \\ 2z = -10 & L_3 \\ t = -1 & L_4 \end{cases}$$

(sixième étape)

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 & L_1 / 2 \\ y = 1 & L_2 \\ z = -5 & L_3 / 2 \\ t = -1 & L_4 \end{cases}}$$

(simplification)

★ **Exercice 13.3**

Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x + y = a \\ 2x + y = b \end{cases}$; **2.** $\begin{cases} x + 2y = a \\ 4x + 5y = b \end{cases}$;

3. $\begin{cases} -3x + 5y + 6z = a \\ -x + 2y + 2z = b \\ x - y - z = c \end{cases}$;

Correction :

1. $\begin{cases} x + y = a & L_1 \\ 2x + y = b & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a & L_1 \\ y = 2a - b & 2L_1 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + b & L_1 - L_2 \\ y = 2a - b & L_2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y = a & L_1 \\ 4x + 5y = b & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a & L_1 \\ 3y = 4a - b & 4L_1 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -5a + 2b & 3L_1 - 2L_2 \\ 3y = 4a - b & L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3}a + \dfrac{2}{3}b & L_1/3 \\ y = \dfrac{4}{3}a - \dfrac{1}{3}b & L_2/3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x + 5y + 6z = a & L_1 \\ -x + 2y + 2z = b & L_2 \\ x - y - z = c & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 5y + 6z = a & L_1 \\ y = 3b - a & 3L_2 - L_1 \\ 2y + 3z = a + 3c & L_1 + 3L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 5y + 6z = a & L_1 \\ y = 3b - a & L_2 \\ 3z = 3a - 6b + 3c & L_3 - 2L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 5y + 6z = a & L_1 \\ y = 3b - a & L_2 \\ z = a - 2b + c & L_3/3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 5y = -5a + 12b - 6c & L_1 - 6L_3 \\ y = 3b - a & L_2 \\ z = a - 2b + c & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -3b - 6c & L_1 - 5L_2 \\ y = -a + 3b & L_2 \\ z = a - 2b + c & L_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b + 2c & L_1/(-3) \\ y = -a + 3b & L_2 \\ z = a - 2b + c & L_3 \end{cases}$

★ **Exercice 13.4** ***(bonus)***

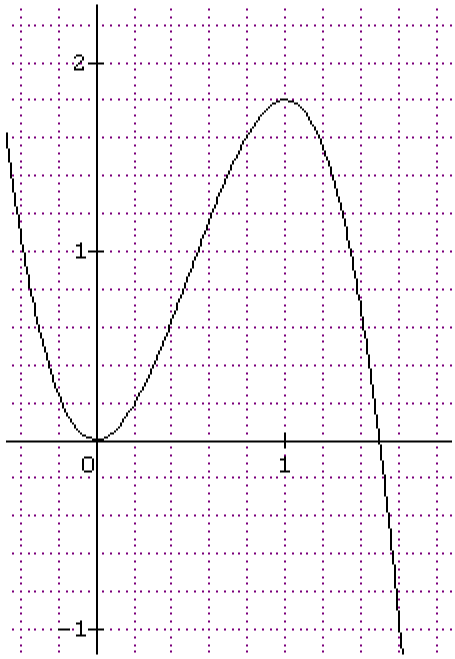
Le plan est muni d'un repère orthonormal.

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ ci-dessous.

On suppose que $f(x)$ est de la forme : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ où *a*, *b* et *c* sont des réels.

1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$.

2. Déterminer les réels *a*, *b* et *c*.



Correction :

1. Graphiquement, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1{,}8$. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente.

Or cette dernière est horizontale. Donc $f'(1) = 0$.

2. $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, donc $f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$ et $f(1) = 1{,}8 \Leftrightarrow a + b = 1{,}8$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$, donc $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b = 0$.

a et *b* sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} a + b = 1{,}8 & L_1 \\ 3a + 2b = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1{,}8 & L_1 \\ b = 5{,}4 & 3L_1 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3{,}6 & L_1 - L_2 \\ b = 5{,}4 & L_2 \end{cases}.$$

Finalement, $a = -3{,}6$, $b = 5{,}4$ et $c = 0$.