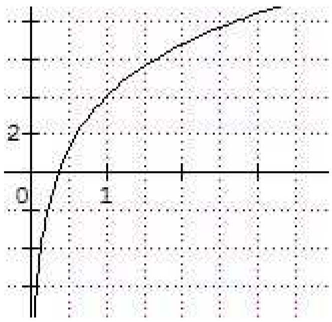
Premiers exercices sur les limites

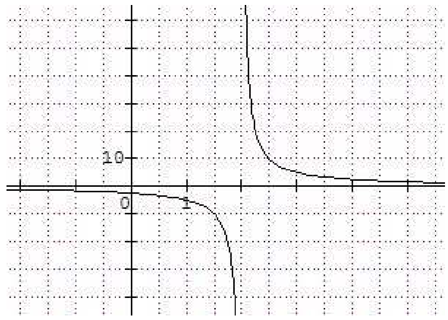
⋆ Exercice 7.1

À l'aide d'une lecture graphique, conjecturer, les limites demandées.

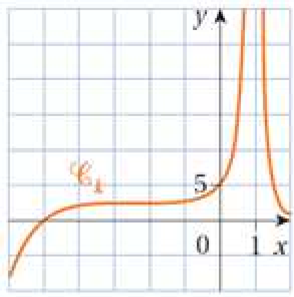
a. limite en 0^+



b. limites en $-\infty$, $+\infty$, 2^- et 2^+



c. limites en $-\infty$, 1^- et 1^+



Correction :

Graphiquement :

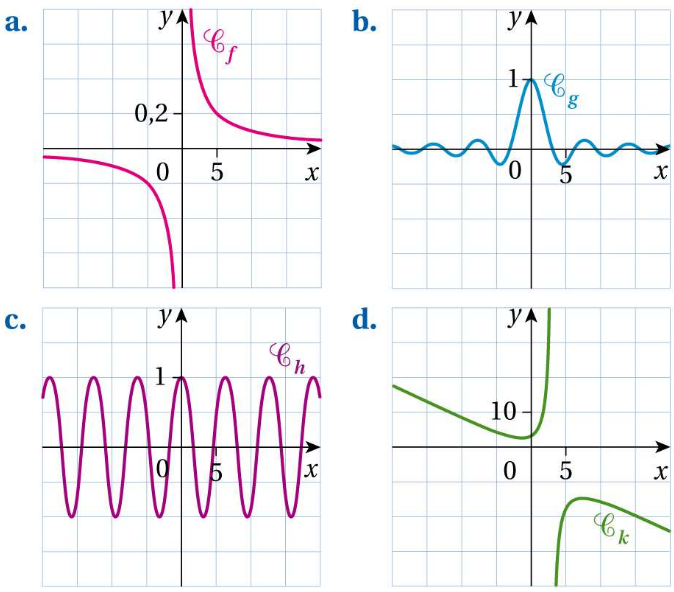
a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

⋆ Exercice 7.2

À l'aide d'une lecture graphique, conjecturer, si elles existent, les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.



Correction :

Graphiquement :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

c) La fonction n'a pas de limite, ni en $-\infty$, ni en $+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

⋆ Exercice 7.3

Déterminer les limites suivantes :

1. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2$; **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2$.

2. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3$; **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^3$.

3. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{6}{x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-7x}$.

4. **a)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{4}{3x}$;

d) $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{5x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{8}{-x}$; **f)** $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{-9}{-2x}$.

Correction :

Pour calculer une limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$), on remplace x par $+\infty$ (resp. $-\infty$).
On a par exemple les règles suivantes :

$(+\infty)^2=(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$; $(+\infty)^3=+\infty$; $5\times(+\infty)=+\infty$; $-3\times(+\infty)=-\infty$

$(-\infty)^2=(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$; $(-\infty)^3=-\infty$; $4\times(-\infty)=-\infty$; $-2\times(-\infty)=+\infty$

$$(-\infty)\times(+\infty)=-\infty$$

1. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^2=+\infty$; **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2=-\infty$.

2. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3=+\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3=-\infty$; **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3=-\infty$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} -7x^3=+\infty$.

Concernant la fonction inverse, on peut appliquer les règles suivantes :

$$\frac{1}{+\infty}=0 \quad ; \quad \frac{1}{-\infty}=0 \quad ; \quad \frac{1}{0^+}=+\infty \quad ; \quad \frac{1}{0^-}=-\infty$$

(dans cette notation, 0^+ n'est pas 0 : c'est un nombre infiniment petit proche de 0 et positif)

3. **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$; **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}=0$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3x}=0$; **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{6}{x}=0$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{-7x}=0$.

4. **a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4}{3x} = +\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{5x} = -\infty$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{8}{-x} = -\infty$; **f)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-9}{-2x} = -\infty$.

★ Exercice 7.4

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions polynômes suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 - x + 1$ **2.** $f(x) = x^2 - 4x + 1$ **3.** $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$

4. $f(x) = -2(x-1)^2$ **5.** $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$ **6.** $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 10$

7. $f(x) = (x+1)(x-2)^2$

Correction :

Dans cet exercice, on applique la règle du monôme de plus haut degré.
La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la même que celle obtenue en ne considérant que le monôme de plus haut degré.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

Continuité et dérivation
Exercices

Équations f (x) = k

★ Exercice 7.5

Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$var\,f$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

1. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une seule solution sur $[1\,;\,3]$.

2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une seule solution sur $[3\,;+\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une seule solution sur $]-\infty\,;\,1]$.

Correction :

On considère une équation de la forme $f(x)=k$. Le théorème de la bijection permet de prouver que cette équation a une seule solution sur un intervalle. Pour cela, il faut que :

① *f* soit continue sur l'intervalle

② *f* soit <u>strictement</u> monotone (croissante ou décroissante) sur l'intervalle

③ le nombre *k* appartienne à l'image de l'intervalle par la fonction *f*

1.
- *f* est continue sur $[1\,;\,3]$.
- *f* est strictement croissante sur $[1\,;\,3]$.
- $f([1\,;\,3])=[-1,2]$, donc $0\in f([1\,;\,3])$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[1\,;\,3]$.

2.
- *f* est continue sur $[3\,;+\infty[$.
- *f* est strictement décroissante sur $[3\,;+\infty[$.
- $f([3\,;+\infty[)=]-\infty\,;\,2]$, donc $0\in f([3\,;+\infty[)$.

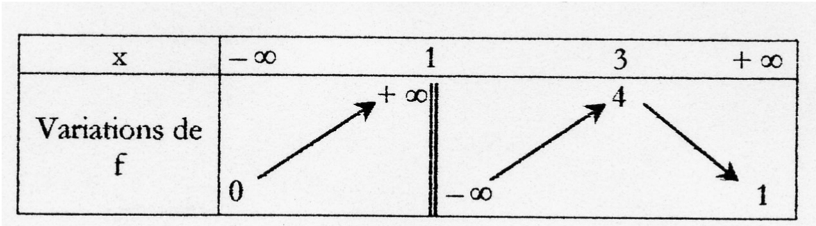
D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[3\,;+\infty[$.

3.
- f est continue sur $]-\infty\ ;1]$.
- f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;1]$.
- $f\left(]-\infty\ ;1]\right)=[-1,+\infty[$, donc $0\in f\left(]-\infty\ ;1]\right)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;1]$.

★ **Exercice 7.6**

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$, dont le tableau de variation est :



Pour chaque question, une justification rigoureuse est attendue.

1. Combien l'équation $f(x)=2$ possède-t-elle de solution(s) sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$?

2. Combien l'équation $f(x)=5$ possède-t-elle de solution(s) sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$?

3. Combien l'équation $f(x)=-1$ possède-t-elle de solution(s) sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$?

Correction :

1. D'après le tableau des variations de *f*, l'équation $f(x)=2$ possède trois solutions sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;+\infty[$.

Justification rigoureuse : on applique trois fois le théorème de la bijection.

- f est continue sur $]-\infty\ ;1[$.
- f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;1[$.
- $f\left(]-\infty\ ;1[\right)=]0;+\infty[$, donc $2\in f\left(]-\infty\ ;1[\right)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;1[$.

- f est continue sur $]1\ ;3]$.
- f est strictement croissante sur $]1\ ;3]$.
- $f\left(]1\ ;3]\right)=]-\infty\ ;4]$, donc $2\in f\left(]1\ ;3]\right)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution dans l'intervalle $]1\,;3]$.

- f est continue sur $[3;+\infty[$.
- f est strictement croissante sur $[3;+\infty[$.
- $f([3;+\infty[)=]1\,;4]$, donc $2\in f([3;+\infty[)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution dans l'intervalle $[3;+\infty[$.

En définitive, l'équation $f(x)=2$ possède trois solutions dans $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

2. D'après le tableau des variations de f, l'équation $f(x)=5$ possède une seule solution sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

Justification rigoureuse : on applique une fois le théorème de la bijection et on fait une phrase pour expliquer qu'il n'y a pas de solution sur $]1\,;+\infty[$.

- f est continue sur $]-\infty\,;1[$.
- f est strictement croissante sur $]-\infty\,;1[$.
- $f(]-\infty\,;1[)=]0;+\infty[$, donc $5\in f(]-\infty\,;1[)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=5$ possède une unique solution dans l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

Sur $]1\,;+\infty[$, 4 est maximum de f. L'équation $f(x)=5$ ne possède pas de solution dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

En définitive, l'équation $f(x)=2$ possède trois solutions dans $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

3. D'après le tableau des variations de f, l'équation $f(x)=-1$ possède une seule solution sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

Justification rigoureuse : on applique une fois le théorème de la bijection et on fait deux phrases pour expliquer qu'il n'y a pas de solution sur $]-\infty\,;1[$ et sur $[3\,;+\infty[$.

- f est continue sur $]1\,;3]$.
- f est strictement croissante sur $]1\,;3]$.
- $f(]1\,;3])=]-\infty\,;4]$, donc $-1\in f(]1\,;3])$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=-1$ possède une unique solution dans l'intervalle $]1\,;3]$.

Sur $]-\infty\ ;\ 1[$, 0 est minimum de *f*. L'équation $f(x)=-1$ ne possède pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

Sur $[3\ ;\ +\infty[$, 0 est minimum de *f*. L'équation $f(x)=-1$ ne possède pas de solution dans l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$.

En définitive, l'équation $f(x)=2$ possède trois solutions dans $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Dérivées

★ Exercice 7.7

Déterminer les dérivées des fonctions polynômes suivantes :

1. $f(x)=2x^2-x+1$ **2.** $f(x)=x^2-4x+1$ **3.** $f(x)=-2x^2+4x-2$

4. $f(x)=-2(x-1)^2$ **5.** $f(x)=4x^3-6x^2+2$ **6.** $f(x)=2x^3-15x^2+36x-10$

7. $f(x)=(x+1)(x-2)^2$

Correction :

1. $f(x)=2x^2-x+1$

$f'(x)=4x-1$

2. $f(x)=x^2-4x+1$

$f'(x)=2x-4$

3. $f(x)=-2x^2+4x-2$

$f'(x)=-4x+4$

4. $f(x)=-2(x-1)^2=-2\left(x^2-2x+1\right)=-2x^2+4x-2$.

C'est la même fonction que précédemment !

$f'(x)=-4x+4$

5. $f(x)=4x^3-6x^2+2$

$f'(x)=12x^2-12x$.

6. $f(x)=2x^3-15x^2+36x-10$

$f'(x)=6x^2-30x+36x$

7. $f(x)=(x+1)(x-2)^2=(x+1)\left(x^2-4x+4\right)=x^3-4x^2+4x+x^2-4x+4=x^3-3x^2+4$.

$f'(x)=3x^2-6x$

★ Exercice 7.8

Pour chacune des fonctions de l'exercice **7.7** :
1. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer la dérivée.
3. Étudier le signe de la dérivée.
4. En déduire le tableau de variations complet de la fonction.

Correction :

Fonction n°1

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$.

2. $f'(x) = 4x - 1$.

3. $\quad f'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \; 4x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \; 4x \geq 1$

$\Leftrightarrow \; x \geq \dfrac{1}{4}$.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right) + 1 = \dfrac{2}{16} - \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{1-2+8}{8} = \dfrac{7}{8}$.

Fonction n°2

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

2. $f'(x) = 2x - 4$.

3. $\quad f'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \; 2x - 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow \; 2x \geq 4$

$\Leftrightarrow \; x \geq \dfrac{4}{2} = 2$.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f(2)=2^2-4\times 2+1=4-8+1=-3$.

Fonctions n°3 et n°4

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2=-\infty$.

2. $f'(x)=-4x+4$.

3. $f'(x)\geq 0$

$\Leftrightarrow\ -4x+4\geq 0$

$\Leftrightarrow\ -4x\geq -4$

$\Leftrightarrow\ x\leq 1$.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

De plus, $f(1)=-2\times 1^2+4\times 1-2=-2+4-2=0$.

Fonction n°5

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3=+\infty$.

2. $f'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$.

3. 0 et 1 sont racines évidentes.

$f'(x)$ est positif à l'extérieur des racines.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f(0)=2$ et $f(1)=4\times 1^3-6\times 1^2+2=4-6+2=0$.

Fonction n°6

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$.

2. $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

3. Étudions le signe de $x^2 - 5x + 6$.

On pose $a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$. Calculons le discriminant Δ du trinôme $x^2 - 5x + 6$.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4\times1\times6$

$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$.

Le trinôme $x^2 - 5x + 6$ possède donc deux racines réelles :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-1}{2\times1} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+1}{2\times1} = \dfrac{6}{2} = 3$.

$f'(x)$ est donc positif à l'extérieur des racines.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	18	$\searrow$	17	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f(2) = 2\times2^3 - 15\times2^2 + 36\times2 - 10 = 16 - 60 + 72 - 10 = 18$ et

$f(3) = 2\times3^3 - 15\times3^2 + 36\times3 - 10 = 54 - 135 + 108 - 10 = 17$

Fonction n°7

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

2. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

3. 0 et 2 sont racines évidentes.

$f'(x)$ est positif à l'extérieur des racines.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f(0) = 4$ et $f(2) = 2^3 - 3\times2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$.

★ Exercice 7.9

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x^2-4$.

1. Étudier les variations de *g* sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. $g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$.

$g'(x)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont 0 et 2.

$g'(x)$ est donc du signe de 3 à l'extérieur des racines.

On en déduit le tableau des variations de *g* :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

$g(0)=0^3-3\times0^2-4=-4$ et $g(2)=2^3-3\times2^2-4=8-3\times4-4=8-12-4=-8$.

2. Sur $]-\infty\,;2]$, -1 est maximum.

Donc l'équation $g(x)=0$ ne possède pas de solution sur $]-\infty\,;2]$.

- *g* est continue sur $]2\,;+\infty[$
- *g* est strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$
- $0\in g(]2\,;+\infty[)=]-9\,;+\infty[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution sur $]2\,;+\infty[$.

3. On en déduit le tableau du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

★ Exercice 7.10

Un artisan a un bénéfice net, en euros, qui dépend du nombre x de pièces vendues.
Ce bénéfice est donné par :

$$\text{pour } x \in [0\,;+\infty[,\ b(x) = -\frac{x^3}{3} + 50x^2 - 99x - 130.$$

1. Soit b' la fonction dérivée de b. Calculer $b'(x)$.

2. Déterminer le signe de $b'(x)$ et en déduire les variations de la fonction b sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. Quel est le nombre de pièces que l'artisan doit fabriquer pour obtenir un bénéfice maximum ? Calculer ce bénéfice maximum.

Correction :

1. $b'(x) = -\frac{3x^2}{3} + 50\times 2x - 99 = -x^2 + 100x - 99$.

2. 1 et 99 sont racines "évidentes". En effet :

$-1^2 + 100\times 1 - 99 = -1 + 100 - 99 = 0$ et $-99^2 + 100\times 99 - 99 = 99(-99+100-1) = 0$.

$b'(x)$ est du signe de -1 à l'extérieur des racines.

De plus :

$b(0) = -\frac{0^3}{3} + 50\times 0^2 - 99\times 0 - 130 = -130$ et $\lim_{x\to+\infty} b(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^3}{3} = -\infty$.

On en déduit :

x	0		1		99		$+\infty$
$b'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
b	-130	$\searrow$	$b(1)$	$\nearrow$	$b(99)$	$\searrow$	$-\infty$

3. Calculons $b(99) = -\frac{99^3}{3} + 50\times 99^2 - 99\times 99 - 130$.

$$b(99) = -\frac{99^3}{3} + 50\times 99^2 - 99\times 99 - 130$$

$$\Leftrightarrow \quad b(99) = 99^2\left(-\frac{99}{3} + 50 - 1\right) - 130 = 99^2(-33+50-1) - 130$$

$$\Leftrightarrow \quad b(99) = 99^2\times 16 - 130 = 156\ 686.$$

L'artisan doit fabriquer 99 pièces pour obtenir un bénéfice maximum. Ce bénéfice maximum s'élève à 156 686 euros.

Continuité et dérivation
Exercices

Équations f (x) = k

★ Exercice 7.5

Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$var f$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

1. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une seule solution sur $[1\,;\,3]$.

2. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une seule solution sur $[3\,;+\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une seule solution sur $]-\infty\,;\,1]$.

Correction :

On considère une équation de la forme $f(x)=k$. Le théorème de la bijection permet de prouver que cette équation a une seule solution sur un intervalle. Pour cela, il faut que :
① *f* soit continue sur l'intervalle
② *f* soit <u>strictement</u> monotone (croissante ou décroissante) sur l'intervalle
③ le nombre *k* appartienne à l'image de l'intervalle par la fonction *f*

1.
- *f* est continue sur $[1\,;\,3]$.
- *f* est strictement croissante sur $[1\,;\,3]$.
- $f([1\,;\,3])=[-1,2]$, donc $0\in f([1\,;\,3])$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[1\,;\,3]$.

2.
- *f* est continue sur $[3\,;+\infty[$.
- *f* est strictement décroissante sur $[3\,;+\infty[$.
- $f([3\,;+\infty[)=]-\infty\,;\,2]$, donc $0\in f([3\,;+\infty[)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[3\,;+\infty[$.

3. • f est continue sur $]-\infty\ ;1]$.

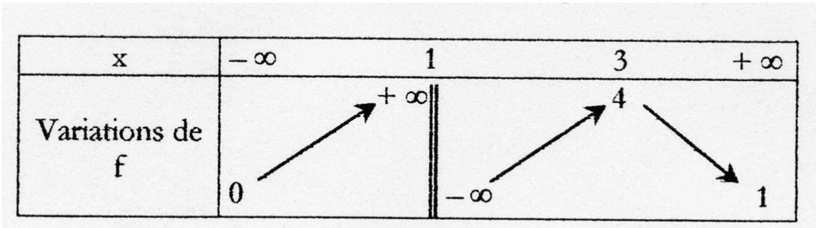
• f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;1]$.

• $f\left(]-\infty\ ;1]\right)=[-1,+\infty[$, donc $0\in f\left(]-\infty\ ;1]\right)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;1]$.

★ Exercice 7.6

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;\ +\infty[$, dont le tableau de variation est :



Pour chaque question, une justification rigoureuse est attendue.

1. Combien l'équation $f(x)=2$ possède-t-elle de solution(s) sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;\ +\infty[$?

2. Combien l'équation $f(x)=5$ possède-t-elle de solution(s) sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;\ +\infty[$?

3. Combien l'équation $f(x)=-1$ possède-t-elle de solution(s) sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;\ +\infty[$?

Correction :

1. D'après le tableau des variations de f, l'équation $f(x)=2$ possède trois solutions sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Justification rigoureuse : on applique trois fois le théorème de la bijection.

• f est continue sur $]-\infty\ ;1[$.

• f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;1[$.

• $f\left(]-\infty\ ;1[\right)=]0;+\infty[$, donc $2\in f\left(]-\infty\ ;1[\right)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;1[$.

• f est continue sur $]1\ ;3]$.

• f est strictement croissante sur $]1\ ;3]$.

• $f\left(]1\ ;3]\right)=]-\infty\ ;4]$, donc $2\in f\left(]1\ ;3]\right)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution dans l'intervalle $]1\ ;3]$.

- f est continue sur $[3;+\infty[$.
- f est strictement croissante sur $[3;+\infty[$.
- $f([3;+\infty[)=]1\ ;4]$, donc $2\in f([3;+\infty[)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution dans l'intervalle $[3;+\infty[$.

En définitive, l'équation $f(x)=2$ possède trois solutions dans $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

2. D'après le tableau des variations de *f*, l'équation $f(x)=5$ possède une seule solution sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Justification rigoureuse : on applique une fois le théorème de la bijection et on fait une phrase pour expliquer qu'il n'y a pas de solution sur $]1\ ;\ +\infty[$.

- f est continue sur $]-\infty\ ;1[$.
- f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;1[$.
- $f(]-\infty\ ;1[)=]0;+\infty[$, donc $5\in f(]-\infty\ ;1[)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=5$ possède une unique solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;1[$.

Sur $]1\ ;\ +\infty[$, 4 est maximum de *f*. L'équation $f(x)=5$ ne possède pas de solution dans l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

En définitive, l'équation $f(x)=2$ possède trois solutions dans $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

3. D'après le tableau des variations de *f*, l'équation $f(x)=-1$ possède une seule solution sur $]-\infty\ ;1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Justification rigoureuse : on applique une fois le théorème de la bijection et on fait deux phrases pour expliquer qu'il n'y a pas de solution sur $]-\infty\ ;1[$ et sur $[3\ ;\ +\infty[$.

- f est continue sur $]1\ ;3]$.
- f est strictement croissante sur $]1\ ;3]$.
- $f(]1\ ;3])=]-\infty\ ;4]$, donc $-1\in f(]1\ ;3])$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=-1$ possède une unique solution dans l'intervalle $]1\ ;3]$.

Sur $]-\infty\ ;\ 1[$, 0 est minimum de *f*. L'équation $f(x)=-1$ ne possède pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

Sur $[3\ ;\ +\infty[$, 0 est minimum de *f*. L'équation $f(x)=-1$ ne possède pas de solution dans l'intervalle $[3\ ;\ +\infty[$.

En définitive, l'équation $f(x)=2$ possède trois solutions dans $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Dérivées

★ **Exercice 7.7**

Déterminer les dérivées des fonctions polynômes suivantes :

1. $f(x)=2x^2-x+1$ **2.** $f(x)=x^2-4x+1$ **3.** $f(x)=-2x^2+4x-2$

4. $f(x)=-2(x-1)^2$ **5.** $f(x)=4x^3-6x^2+2$ **6.** $f(x)=2x^3-15x^2+36x-10$

7. $f(x)=(x+1)(x-2)^2$

Correction :

1. $f(x)=2x^2-x+1$

$f'(x)=4x-1$

2. $f(x)=x^2-4x+1$

$f'(x)=2x-4$

3. $f(x)=-2x^2+4x-2$

$f'(x)=-4x+4$

4. $f(x)=-2(x-1)^2=-2(x^2-2x+1)=-2x^2+4x-2$.

C'est la même fonction que précédemment !

$f'(x)=-4x+4$

5. $f(x)=4x^3-6x^2+2$

$f'(x)=12x^2-12x$.

6. $f(x)=2x^3-15x^2+36x-10$

$f'(x)=6x^2-30x+36x$

7. $f(x)=(x+1)(x-2)^2=(x+1)(x^2-4x+4)=x^3-4x^2+4x+x^2-4x+4=x^3-3x^2+4$.

$f'(x)=3x^2-6x$

★ **Exercice 7.8**

Pour chacune des fonctions de l'exercice **7.7** :

1. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer la dérivée.
3. Étudier le signe de la dérivée.
4. En déduire le tableau de variations complet de la fonction.

Correction :

Fonction n°1

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$.

2. $f'(x) = 4x - 1$.

3. $f'(x) \geq 0$
$\Leftrightarrow\ 4x - 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow\ 4x \geq 1$
$\Leftrightarrow\ x \geq \dfrac{1}{4}$.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{4}\right) + 1 = \dfrac{2}{16} - \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{1-2+8}{8} = \dfrac{7}{8}$.

Fonction n°2

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

2. $f'(x) = 2x - 4$.

3. $f'(x) \geq 0$
$\Leftrightarrow\ 2x - 4 \geq 0$
$\Leftrightarrow\ 2x \geq 4$
$\Leftrightarrow\ x \geq \dfrac{4}{2} = 2$.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f(2)=2^2-4\times 2+1=4-8+1=-3$.

Fonctions n°3 et n°4

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2=-\infty$.

2. $f'(x)=-4x+4$.

3. $f'(x)\geq 0$

$\Leftrightarrow\ -4x+4\geq 0$

$\Leftrightarrow\ -4x\geq -4$

$\Leftrightarrow\ x\leq 1$.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

De plus, $f(1)=-2\times 1^2+4\times 1-2=-2+4-2=0$.

Fonction n°5

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3=+\infty$.

2. $f'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$.

3. 0 et 1 sont racines évidentes.

$f'(x)$ est positif à l'extérieur des racines.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f(0)=2$ et $f(1)=4\times 1^3-6\times 1^2+2=4-6+2=0$.

Fonction n°6

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$.

2. $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6\left(x^2 - 5x + 6\right)$.

3. Étudions le signe de $x^2 - 5x + 6$.

On pose $a = 1$, $b = -5$ et $c = 6$. Calculons le discriminant Δ du trinôme $x^2 - 5x + 6$.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4\times1\times6$

$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$.

Le trinôme $x^2 - 5x + 6$ possède donc deux racines réelles :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-1}{2\times1} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+1}{2\times1} = \dfrac{6}{2} = 3$.

$f'(x)$ est donc positif à l'extérieur des racines.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	18	$\searrow$	17	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f(2) = 2\times2^3 - 15\times2^2 + 36\times2 - 10 = 16 - 60 + 72 - 10 = 18$ et

$f(3) = 2\times3^3 - 15\times3^2 + 36\times3 - 10 = 54 - 135 + 108 - 10 = 17$

Fonction n°7

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

2. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

3. 0 et 2 sont racines évidentes.

$f'(x)$ est positif à l'extérieur des racines.

4. On en déduit le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $f(0) = 4$ et $f(2) = 2^3 - 3\times2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$.

★ Exercice 7.9

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\left(x\right)=x^3-3x^2-4$.

1. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $g\left(x\right)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

3. En déduire le signe de $g\left(x\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. $g'\left(x\right)=3x^2-6x=3x\left(x-2\right)$.

$g'\left(x\right)$ est un trinôme du second degré dont les racines sont 0 et 2.

$g'\left(x\right)$ est donc du signe de 3 à l'extérieur des racines.

On en déduit le tableau des variations de g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

$g\left(0\right)=0^3-3\times0^2-4=-4$ et $g\left(2\right)=2^3-3\times2^2-4=8-3\times4-4=8-12-4=-8$.

2. Sur $\left]-\infty\ ;2\right]$, -1 est maximum.

Donc l'équation $g\left(x\right)=0$ ne possède pas de solution sur $\left]-\infty\ ;2\right]$.

- g est continue sur $\left]2\ ;+\infty\right[$
- g est strictement croissante sur $\left]2\ ;+\infty\right[$
- $0\in g\left(\left]2\ ;+\infty\right[\right)=\left]-9\ ;+\infty\right[$

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g\left(x\right)=0$ possède une unique solution sur $\left]2\ ;+\infty\right[$.

3. On en déduit le tableau du signe de $g\left(x\right)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

★ Exercice 7.10

Un artisan a un bénéfice net, en euros, qui dépend du nombre x de pièces vendues.
Ce bénéfice est donné par :

$$\text{pour } x \in [0\,;+\infty[,\ b(x) = -\frac{x^3}{3} + 50x^2 - 99x - 130.$$

1. Soit b' la fonction dérivée de b. Calculer $b'(x)$.

2. Déterminer le signe de $b'(x)$ et en déduire les variations de la fonction b sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. Quel est le nombre de pièces que l'artisan doit fabriquer pour obtenir un bénéfice maximum ? Calculer ce bénéfice maximum.

Correction :

1. $b'(x) = -\frac{3x^2}{3} + 50 \times 2x - 99 = -x^2 + 100x - 99$.

2. 1 et 99 sont racines "évidentes". En effet :

$-1^2 + 100 \times 1 - 99 = -1 + 100 - 99 = 0$ et $-99^2 + 100 \times 99 - 99 = 99(-99 + 100 - 1) = 0$.

$b'(x)$ est du signe de -1 à l'extérieur des racines.

De plus :

$b(0) = -\frac{0^3}{3} + 50 \times 0^2 - 99 \times 0 - 130 = -130$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} b(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x^3}{3} = -\infty$.

On en déduit :

x	0		1		99		$+\infty$
$b'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
b	-130	$\searrow$	$b(1)$	$\nearrow$	$b(99)$	$\searrow$	$-\infty$

3. Calculons $b(99) = -\frac{99^3}{3} + 50 \times 99^2 - 99 \times 99 - 130$.

$$b(99) = -\frac{99^3}{3} + 50 \times 99^2 - 99 \times 99 - 130$$

$$\Leftrightarrow \quad b(99) = 99^2\left(-\frac{99}{3} + 50 - 1\right) - 130 = 99^2(-33 + 50 - 1) - 130$$

$$\Leftrightarrow \quad b(99) = 99^2 \times 16 - 130 = 156\ 686.$$

L'artisan doit fabriquer 99 pièces pour obtenir un bénéfice maximum. Ce bénéfice maximum s'élève à 156 686 euros.