Fonction logarithme népérien

I. Définition – Relation fonctionnelle

1. Définition

La fonction logarithme népérien est l'unique fonction qui a pour dérivée $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et qui s'annule en 1. On la note ln.

Conséquences immédiates :

▪ ln est définie sur $]0\,;+\infty[$. Elle n'est pas définie en 0, ni pour les nombres négatifs.

▪ ln 1 = 0

▪ ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

▪ D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

2. Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels strictement positifs *a* et *b*, ln *ab* = ln *a* + ln *b* (1)

De cette relation on déduit d'autres relations comme par exemple : $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$,

$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ ou encore $\ln a^n = n\ln a$

II. Étude des variations de ln

1. Sens de variation. Signe

Soit $f(x) = \ln x$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Or $f'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$. Donc *f* est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Tableau de variations. De plus ln 1 = 0.

D'après le tableau de variation :
Pour tout x de $]1\,;+\infty[$, $\ln x > 0$.
Pour tout x de $]0\,;1[$, $\ln x < 0$.

De plus :
Pour tous nombres réels strictement positifs a et b,
$\ln a = \ln b$ ssi $a = b$,
$\ln a \leq \ln b$ ssi $a \leq b$,
$\ln a < \ln b$ ssi $a < b$.
$\ln a$ et $\ln b$ sont rangés dans le même ordre que a et b.

2. Courbe représentative, limites

Tableau de variation définitif. Tableau de valeurs vu en introduction. Graphique.

$$\text{On a } \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty.$$

D'après le tableau de variation, il existe un seul nombre réel x_0 tel que $\ln x_0 = 1$.
On note e ce nombre.

Définition :
e est le nombre réel défini par ln e = 1
SCILAB : e = 2.71828 arrondi à 10^{-5} près.

Pour tout nombre $n \in \mathbb{Z}$, $\ln \mathrm{e}^n = n$.

Ainsi, $\ln \mathrm{e}^2 = 2$; $\ln \mathrm{e}^3 = 3$; $\ln \mathrm{e}^{-1} = -1$; $\ln \mathrm{e}^{-2} = -2$; $\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2}$; $\ln\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} = -\dfrac{1}{2}$...

3. Dérivée des fonctions de la forme ln *u*

Exemple :

Calculer la dérivée de la fonction *f* définie sur $\left]-\frac{1}{3} ; +\infty\right[$ par $f(x)=\ln(3x+1)$.

Soit *u* une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle *I*. La fonction *f* définie sur *I* par $f(x)=\ln\left[u(x)\right]$ est dérivable sur *I* et $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

★ **Exercice**

1. Calculer la dérivée de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(x^4+1\right)$.

2. Déterminer une primitive de la fonction *f* définie sur $I=]-2 ;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x+2}$.