Fonction logarithme népérien
Exercices

Simplification d'expressions utilisant ln

★ Exercice 14.1

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants :

1. $A=\ln(8)$ **2.** $B=\ln\left(2\mathrm{e}^3\right)$ **3.** $C=2\ln(4)-\ln\left(4\mathrm{e}^2\right)$

Correction :

Rappel : $\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$

1. $A=\ln(8)=\ln\left(2^3\right)=3\ln(2)$.

Rappels : $\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$ et $\ln\left(\mathrm{e}^x\right)=x$

2. $B=\ln\left(2\mathrm{e}^3\right)=\ln(2)+\ln\left(\mathrm{e}^3\right)=\ln(2)+3$.

3. $C=2\ln(4)-\ln\left(4\mathrm{e}^2\right)=2\ln\left(2^2\right)-\left(\ln(4)+\ln\left(\mathrm{e}^2\right)\right)$

$\Leftrightarrow$ $C=4\ln(2)-\ln\left(2^2\right)-\ln\left(\mathrm{e}^2\right)=4\ln(2)-2\ln(2)-2=2\ln(2)-2$

★ Exercice 14.2

Exprimer plus simplement les réels :

1. $\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$ **2.** $\ln\left(2\mathrm{e}^x\right)$

Correction :

1. $\ln\left(\mathrm{e}^{2x}\right)=2x$

2. $\ln\left(2\mathrm{e}^x\right)=\ln(2)+\ln\left(\mathrm{e}^x\right)=\ln(2)+x$

Inéquations utilisant ln

★ Exercice 14.3

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(x+3) > \ln 5$ **2.** $\ln(x) > 1$ **3.** $\ln(x) \leq 2$

Correction :

Rappel : $\ln(a) \leq \ln(b)$

$\Leftrightarrow \quad a \leq b$

Le symbole « $\leq$ » peut être remplacé par « < » ou « $\geq$ » ou « > ».

1. $\ln(x+3) > \ln 5$

$\Leftrightarrow \quad x+3 > 5$

$\Leftrightarrow \quad x > 5-3$

$\Leftrightarrow \quad x > 2$

2. $\ln(x) > 1$

$\Leftrightarrow \quad \ln(x) > \ln(\mathrm{e})$

$\Leftrightarrow \quad x > \mathrm{e}$

3. $\ln(x) \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad \ln(x) \leq \ln(\mathrm{e}^2)$

$\Leftrightarrow \quad x \leq \mathrm{e}^2$

★ Exercice 14.4

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3^n \geq 10^6$ **2.** $0,7^n \leq 10^{-4}$

Correction :

1. $3^n \geq 10^6$

$\Leftrightarrow \quad \ln(3^n) \geq \ln(10^6)$

$\Leftrightarrow \quad n\ln(3) \geq 6\ln(10)$

$\Leftrightarrow \quad n \geq \dfrac{6\ln(10)}{\ln(3)}$ car $\ln(3) > 0$ $(\ln 3 \approx 1,1)$

2.

$$\begin{aligned} & 0,7^n \leq 10^{-4} \\ \Leftrightarrow \quad & \ln\left(0,7^n\right) \leq \ln\left(10^{-4}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & n\ln(0,7) \leq -4\ln(10) \\ \Leftrightarrow \quad & n \geq \frac{-4\ln(10)}{\ln(0,7)} \text{ car } \ln(0,7) < 0 \end{aligned}$$

Limites

★ Exercice 14.5

Calculer les limites suivantes :

1. *Opérations classiques (somme, produit, …)* :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x$ **c)** $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2-\ln x\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x}$

2. *Composition* : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$

3. *Formes indéterminées* :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

Correction :

1. a)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right) = +\infty \end{array}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x = +\infty \end{array}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to0}\left(-\ln x\right) = -\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim\limits_{x\to0}\left(x^2-\ln x\right) = +\infty \end{array}$$

d)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x} = -\infty \end{array}$$

2.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}+1=1 \\ \bullet \lim\limits_{X\to 1} \ln(X)=0 \end{array}\right\} \text{par composée de limites, } \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=0$$

3. a)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x=-\infty \end{array}\right\} \text{par croissances comparées, } \lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln x)=+\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ est une limite du cours à connaitre directement :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$ par croissances comparées.

On peut la « retrouver » ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \end{array}\right\} \text{par quotient de limites, } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$$

(explication : le « +∝ » du bas l'emporte)

Dérivées et études des variations

★ Exercice 14.6

Pour chacune des fonctions suivantes :

a) Déterminer la dérivée

b) Étudier les variations

1. $f(x)=\ln(x)+x$ **2.** $f(x)=\ln(x)-x$ **3.** $f(x)=\ln(x)-2x$ **4.** $f(x)=\ln(x)-\dfrac{1}{2}x^2$

5. $f(x)=\ln(3x)$ **6.** $f(x)=\ln(-x)$ **7.** $f(x)=\ln(x-2)$ **8.** $f(x)=x\ln(x)$

9. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ **10.** $f(x)=x^2+1-2\ln(x)$

Correction :

1. Étude complète de la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)+x$.

☆ Limites :

- $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0}x=0$

$\Bigg\}$ par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x)+x)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

$\Bigg\}$ par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x)+x)=+\infty$

Rappel : $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$.

Remarque : la technique du « point, point, accolade » est LA technique la plus importante des limites.

☆ Dérivée :

$$f'(x)=\frac{1}{x}+1$$

Rappel : $\ln'(x)=\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x}>0$ car $x\in\,]0\,;+\infty[$.

☆ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x)>0$ comme somme de deux termes positifs sur $]0\,;+\infty[$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Étude complète de la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-x$.

☆ **Limites :**

- $\lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to0}-x=0$

par somme de limites, $\lim\limits_{x\to0}\left(\ln(x)-x\right)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-x\right)=-\infty$

Rappel : « $+\infty-\infty$ » est la seule forme indéterminée relative à l'addition ou à la soustraction.

☆ **Dérivée :**

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1$$

Remarque : ici, le signe de $f'(x)$ n'est plus « évident ». Il faut alors factoriser, c'est-à- dire réduire au même dénominateur.

$$f'(x)=\frac{1-x}{x}.$$

Remarque : on peut maintenant étudier le signe des deux facteurs.

☆ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x>0$ car $x\in\,]0\,;+\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1-x$.

Remarque : ici, il est possible de poser l'inéquation

$1-x\geq0\Leftrightarrow-x\geq-1\Leftrightarrow x\leq1$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

$f(1)=\ln(1)-1=-1.$

3. Étude complète de la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-2x$.

☆ **Limites :**

- $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0}-2x=0$

$\left.\right\}$ par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}-2x=-\infty$

$\left.\right\}$ par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

☆ **Dérivée :**

$$f'(x)=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}.$$

☆ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x>0$ car $x\in\,]0\,;+\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1-2x$.

  $1-2x\geq 0 \Leftrightarrow -2x\geq -1 \Leftrightarrow x\leq \frac{1}{2}$

  On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\frac{1}{2})$	$\searrow$	$-\infty$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)-2\times\frac{1}{2}=\ln\left(\frac{1}{2}\right)-1=-\ln(2)-1\approx -1,7.$$

4. Étude complète de la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-\dfrac{1}{2}x^2$.

☆ Limites :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1}{2}x^2=0\end{array}\right\}\ \text{par somme de limites, } \lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(x)-\dfrac{1}{2}x^2\right)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{2}x^2=-\infty\end{array}\right\}\ \text{par croissances comparées, } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-\dfrac{1}{2}x^2\right)=-\infty$$

☆ Dérivée :

$$f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}.$$


Remarque : ici, on a factorisé grâce à l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Il aurait été possible de passer par Δ mais ça aurait été maladroit.

☆ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x>0$ car $x\in\,]0\,;+\infty[$.
- $1+x>0$ car $x\in\,]0\,;+\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1-x$.

  $1-x\geq 0 \Leftrightarrow -x\geq -1 \Leftrightarrow x\leq 1$

  On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

$$f(1)=\ln(1)-\frac{1}{2}\times 1^2=-\frac{1}{2}.$$

5. Étude complète de la fonction *f* définie par : $f(x)=\ln(3x)$.

☆ Ensemble de définition :

Remarque : il s'agit d'une fonction composée de la forme $\ln(u)$. Elle est définie pour $u>0$.

$3x>0 \Leftrightarrow x>0$. *f* est donc définie sur $]0\,;+\infty[$.

☆ Limites :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0 \\ \bullet \lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty \end{array}\right\} \text{par composée de limites, } \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to +\infty} 3x = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array}\right\} \text{par composée de limites, } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

☆ Dérivée :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Donc $f'(x)=\dfrac{3}{3x}=\dfrac{1}{x}$.

☆ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x)>0$ car $x\in\,]0\,;+\infty[$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

6. Étude complète de la fonction *f* définie par : $f(x)=\ln(-x)$.

☆ Ensemble de définition :

Remarque : il s'agit d'une fonction composée de la forme $\ln(u)$. Elle est définie pour $u>0$.

$-x>0 \Leftrightarrow x<0$. *f* est donc définie sur $]-\infty\,;0[$.

☆ Limites :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \displaystyle\lim_{x\to-\infty} -x=+\infty \\ \bullet \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln(X)=+\infty\end{array}\right\}\text{ par composée de limites, } \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \displaystyle\lim_{x\to 0} -x=0 \\ \bullet \displaystyle\lim_{X\to 0} \ln(X)=-\infty\end{array}\right\}\text{ par composée de limites, } \lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$$

☆ Dérivée :

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

Donc $f'(x)=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$.

☆ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x)<0$ car $x\in\,]-\infty\,;0[$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]-\infty\,;0[$:

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ ↘	$-\infty$

7. Étude complète de la fonction *f* définie par : $f(x)=\ln(x-2)$.

☆ Ensemble de définition :

Remarque : il s'agit d'une fonction composée de la forme $\ln(u)$. Elle est définie pour $u>0$.

$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$. *f* est donc définie sur $]2\,;+\infty[$.

☆ Limites :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 2} x-2=0 \\ \bullet\ \lim\limits_{X\to 0} \ln(X)=-\infty\end{array}\right\} \text{par composée de limites, } \lim_{x\to 2} f(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to +\infty} x-2=+\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X)=+\infty\end{array}\right\} \text{par composée de limites, } \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

☆ Dérivée :

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$. Donc $f'(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

☆ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x)>0$ car $x>2$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]2\,;+\infty[$:

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

8. Étude complète de la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(x)$.

☆ Limites :

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ (c'est une limite du cours).

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty \end{array}$$

Rappel : « $0\times\infty$ » est la seule forme indéterminée relative à la multiplication.

☆ Dérivée :

$(u\times v)'=u'v+v'u$, donc :

$$f'(x)=(1)\times(\ln x)+\left(\frac{1}{x}\right)\times(x)=\ln x+1.$$

Remarque : attention à bien reconnaitre le produit « *uv* ». Ici, $u(x)=x$ et $v(x)=\ln(x)$.

☆ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

Remarque : ici, on pose directement l'inéquation.

$$\begin{array}{ll} & \ln x+1>0 \\ \Leftrightarrow & \ln x>-1 \\ \Leftrightarrow & x>\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{array}$$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

9. Étude complète de la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

☆ **Limites :**

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+ \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{par quotient de limites,}\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty\end{array}$$

Rappel : « $\dfrac{\infty}{0}=\infty$ » et « $\dfrac{0}{\infty}=0$ » ne sont pas des formes indéterminées.

Remarque : lorsqu'une limite comporte une « division par 0 », on doit faire attention au signe du dénominateur.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ par croissances comparées (c'est une limite du cours).

Rappel : « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ » sont les deux formes indéterminées relatives à la division.

☆ **Dérivée :**

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$, donc : $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)\times(x)-(1)\times(\ln x)}{(x)^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Remarque : attention à bien reconnaitre le produit « $\dfrac{u}{v}$ ». Ici, $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=x$.

☆ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x^2>0$ car $x>0$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1-\ln x$.

$$\begin{array}{ll} & 1-\ln x>0. \\ \Leftrightarrow & -\ln x>-1 \\ \Leftrightarrow & \ln x<1 \\ \Leftrightarrow & x<\mathrm{e}\ \text{ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \end{array}$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(\mathrm{e}) = \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

---

10. Étude complète de la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 1 - 2\ln(x)$.

☆ **Limites :**

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to 0} x^2+1=1 \\ \bullet \lim\limits_{x\to 0} -2\ln(x)=+\infty \end{array}\right\} \text{par somme de limites, } \lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to +\infty} x^2+1=+\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to +\infty} -2\ln(x)=-\infty \end{array}\right\} \text{par croissances comparées, } \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

☆ **Dérivée :**

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

☆ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $x > 0$ car $x \in]0\,;+\infty[$.
- $x+1 > 0$ car $x \in]0\,;+\infty[$.
- $f'(x)$ est donc du signe de $x-1$. $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 1^2 + 1 - 2\ln(1) = 1 + 1 - 0 = 2$

★ Exercice 14.7

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln x-x+1$.

1. Étudier le sens de variation, puis le signe de g.

2. En déduire la position relative de $C_{\ln}$ par rapport à la droite D d'équation $y=x-1$.

Correction :

1.

Remarque : pour les limites, il est plus simple d'écrire $g(x)=\ln x+(-x+1)$.

☆ Limites :

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0}-x+1=1\end{array}\right\}\ \text{par somme de limites,}\quad \lim_{x\to 0}g(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to +\infty}-x+1=-\infty\end{array}\right\}\ \text{par croissances comparées,}\quad \lim_{x\to +\infty}g(x)=-\infty$$

☆ Dérivée :

$$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}.$$

☆ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $g'(x)$:

- $x>0$ car $x\in\,]0\,;+\infty[$.
- $g'(x)$ est donc du signe de $1-x$. $1-x>0\Leftrightarrow -x>-1\Leftrightarrow x<1$

  On en déduit le signe de $g'(x)$ puis le tableau des variations de g sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$g(1)=\ln 1-1+1=0$.

☆ Signe de la fonction *g* :

D'après le tableau des variations de g, $g(x)\leq 0$.

2. On souhaite déterminer la position relative de la fonction $f(x)=\ln(x)$ et de la droite d'équation $y=x-1$.

Pour déterminer la position relative de la courbe d'une fonction $f(x)$ et de la droite d'équation $y=ax+b$:

① On calcule $f(x)-(ax+b)$.

② On détermine le signe de $f(x)-(ax+b)$.

➢ Si $f(x)-(ax+b)\geq 0$ alors C (la courbe de *f*) est au-dessus de *D* (la droite).

Si $f(x)-(ax+b)\leq 0$ alors C est au-dessous de *D*.

$f(x)-(x-1)=\ln(x)-x+1=g(x)$.

Or, d'après la question précédente, $g(x)\leq 0$.

On en déduit que $C_{\ln}$ est au-dessous de la droite *D*.

★ Exercice 14.8

Soit la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. Déterminer la limite de *f* en 0, puis en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de *f*.

3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans $]0\,;+\infty[$.

4. *T* est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

a) Déterminer une équation réduite de *T*.

b) Étudier le sens de variation de la fonction *g* définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x}-\ln x+2x-3.$$

c) En déduire la position relative de C_f par rapport à *T*.

Correction :

1.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} -\ln x = +\infty$

par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} -\ln x = -\infty$

par somme de limites, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

2. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{1+x}{x^2}$

- $x^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif.
- $1+x>0$ car $x>0$.
- On en déduit que $f'(x) \leq 0$.

On dresse le tableau des variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty \searrow -\infty$

3.

Pour montrer que l'équation $f(x)=c$ admet une unique solution sur un intervalle *I* :

① On précise que *f* est continue sur *I*.

② On précise que *f* est strictement monotone sur *I*.

③ On précise que $c \in f(I)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=c$ admet une unique solution sur *I*.

① *f* est continue sur $]0\,;+\infty[$ car dérivable sur $]0\,;+\infty[$

② *f* est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

③ $f(]0\,;+\infty[) =]-\infty,+\infty[$ et $0 \in]-\infty,+\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique x_0 sur $]0\,;+\infty[$.

4. a) Pour déterminer une équation de la tangente à la courbe d'une fonction *f* en un point d'abscisse *a*, on procède en trois étapes :

① On calcule $f(a)$.

② On calcule $f'(a)$.

③ Une équation de la tangente à la courbe de *f* en un point d'abscisse *a* est :
$y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

① $f(1)=\dfrac{1}{1}-\ln 1=1$.

② $f'(1)=-\dfrac{1+1}{1^2}=-2$.

③ Une équation réduite de *T* est :
$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-2(x-1)+1=-2x+2+1=-2x+3$.

b) $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+2=\dfrac{-1-x+2x^2}{x^2}=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2}$.

- $x^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif.
- $g'(x)$ est donc du signe de $2x^2-x-1$, polynôme du second degré dont le discriminant est égal à $(-1)^2-4\times 2\times(-1)=1+8=9$ et qui admet donc deux racines : $\dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2}=\dfrac{1-3}{4}=\dfrac{-2}{4}=\dfrac{-1}{2}$ et $\dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2}=\dfrac{1+3}{4}=\dfrac{4}{4}=1$.

$g'(x)$ est finalement du signe de 2 à l'extérieur des racines.

On en déduit le tableau des variations de *g* :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(1)=\dfrac{1}{1}-\ln 1+2-3=0$.

c) Il s'agit d'étudier le signe de $f(x)-(-2x+3)=\dfrac{1}{x}-\ln x+2x-3=g(x)$.

Or, d'après le tableau des variations de g de la question précédente, $g(x)\geq 0$.

On en déduit que C_f est au-dessus de *T*.

★ **Exercice 14.9**

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

1. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation : $1-\ln x\geq 0$.

2. Calculer la limite de *f* en 0 puis calculer la limite de *f* en +∞.

3. Étudier les variations de *f* et donner son tableau de variations.

Correction :

1.
$$\begin{aligned} & 1-\ln x\geq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -\ln x\geq -1 \\ \Leftrightarrow\quad & \ln x\leq 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x\leq \mathrm{e} \end{aligned}$$

Dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation : $1-\ln x\geq 0$ a pour solution : $]0\,;\mathrm{e}[$.

2. Les limites de cette fonction sont très difficiles à calculer.

Remarque : la forme actuelle de *f* ne permet pas de calculer les limites. Il faut la *modifier*.

On va factoriser le dénominateur par $\ln x$. Ainsi : $f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln x\left(\dfrac{x}{\ln x}-1\right)}=\dfrac{1}{\dfrac{x}{\ln x}-1}$.

Dès lors, en 0 :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to 0} x=0 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par quotient de limites,}\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln x}=0\end{array}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln x}-1=-1$, puis $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$ par inverse de limites.

En $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par croissances comparées,}\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty\end{array}.$$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln x}-1=+\infty$, puis $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ par inverse de limites.

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)\times(x-\ln x)-(\ln x)\times\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\frac{1}{x}\ln x-\ln x+\frac{1}{x}\ln x}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}.$$

- $(x-\ln x)^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif.
- $f'(x)$ est donc du signe de $1-\ln x$.

  Ce signe a été étudié à la question précédente.

  On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

$f(\mathrm{e}) = \dfrac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}-\ln \mathrm{e}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$.