Fonction logarithme népérien
Exercices

Simplification d'expressions utilisant ln

★ Exercice 14.1

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants :

1. $A = \ln(8)$ **2.** $B = \ln\left(2e^3\right)$ **3.** $C = 2\ln(4) - \ln\left(4e^2\right)$

★ Exercice 14.2

Exprimer plus simplement les réels :

1. $\ln\left(e^{2x}\right)$ **2.** $\ln\left(2e^{x}\right)$

Inéquations utilisant ln

★ Exercice 14.3

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(x+3) > \ln 5$ **2.** $\ln(x) > 1$ **3.** $\ln(x) \leq 2$

★ Exercice 14.4

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3^n \geq 10^6$ **2.** $0,7^n \leq 10^{-4}$

Limites

★ Exercice 14.5

Calculer les limites suivantes :

1. *Opérations classiques (somme, produit, …)* :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \ln x\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln x$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 - \ln x\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x}$

2. *Composition* : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$

3. *Formes indéterminées* :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \ln x\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

Dérivées et études des variations

★ Exercice 14.6

Pour chacune des fonctions suivantes :

a) Déterminer la dérivée

b) Étudier les variations

1. $f(x)=\ln(x)+x$ **2.** $f(x)=\ln(x)-x$ **3.** $f(x)=\ln(x)-2x$ **4.** $f(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}x^2$

5. $f(x)=\ln(3x)$ **6.** $f(x)=\ln(-x)$ **7.** $f(x)=\ln(x-2)$ **8.** $f(x)=x\ln(x)$

9. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ **10.** $f(x)=x^2+1-2\ln(x)$

★ Exercice 14.7

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln x-x+1$.

1. Étudier le sens de variation, puis le signe de g.

2. En déduire la position relative de $C_{\ln}$ par rapport à la droite D d'équation $y=x-1$.

★ Exercice 14.8

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de f.

3. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans $]0\,;+\infty[$.

4. T est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

   a) Déterminer une équation réduite de T.

   b) Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x}-\ln x+2x-3.$$

   c) En déduire la position relative de C_f par rapport à T.

★ Exercice 14.9

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-\ln x}$.

1. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation : $1-\ln x\geq 0$.

2. Déterminer la limite de f en 0. Conjecturer la limite de f en $+\infty$.

3. Étudier les variations de f et donner son tableau de variations.