

## Dénombrements

*Dénombrer, c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble. C'est déterminer (compter) le nombre de cas liés à une situation donnée.*

### **I. Premiers exemples : le principe multiplicatif et tirages successifs avec remise**

#### *Exemple 1 :*

Au restaurant, on compose un menu par le choix d'une entrée parmi les 5 entrées proposées, puis d'un plat parmi 4 plats proposés, enfin d'un dessert parmi les 6 desserts proposés.  
Quel est le nombre de menus différents possible ?

On peut ainsi composer  $5 \times 4 \times 6 = 120$  menus différents.

On parle de **principe multiplicatif**.

#### *Exemple 2 :*

On lance quatre fois successivement un dé à six faces. On note à chaque fois le numéro de la face supérieure. On forme ainsi un nombre à quatre chiffres, la place de chacun étant fixée par son ordre d'apparition.  
Quel est le nombre total de résultats possible ?

On obtient ainsi  $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1296$  résultats possibles.

La situation qui précède et les situations qui suivent peuvent toutes être assimilées à des tirages de boules dans une urne.

Dans l'exemple précédent, la situation est exactement la même que celle où on aurait 6 boules (indiscernables) numérotées de 1 à 6 dans une urne.

On tire une boule au hasard. On note son numéro. *On la remet dans l'urne.* On tire une deuxième boule au hasard, etc. Et ce, 4 fois, ce qui représente les quatre lancers de dés.

On parle de **tirages successifs avec remise**.

Remarque : dans le cas de tirages successifs avec remise, la puissance d'un nombre est au cœur des calculs.

## **II. Tirages successifs sans remise**

### **Exemple 3 :**

Combien de “mots” peut-on écrire à l’aide de quatre lettres différentes ? (Un “mot” est une succession de lettres qui ne se trouve pas nécessairement dans le dictionnaire)

Il y a :  $26 \times 25 \times 24 \times 23$  mots possibles (inutile de calculer).

Dans cet exemple, tout se passe « comme si » nous disposions d’une urne dans laquelle il y aurait 26 boules « numérotées » de A à Z (ou de 1 à 26, comme vous voulez).

On tire une boule au hasard. On note sa lettre / son numéro. *On ne la remet pas dans l’urne* (on la « jette »). On tire une deuxième boule au hasard (il n’y a alors plus que 25 boules dans l’urne), etc. Et ce, 4 fois, ce qui représente les quatre lettres.

### **Exemple 4 :**

Quel est le nombre d’arrivées possibles d’une course à 5 participants ? (On admet qu’il n’y a pas d’ex-æquo)

Il y a  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  arrivées possibles.

### **Définition : Factorielle d’un entier naturel**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Le nombre “**factorielle  $n$** ” est le produit de tous les entiers naturels de 1 à  $n$  ; on le note  $n!$ .

Ainsi, on a  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ . Par convention, on a  $0! = 1$  et  $1! = 1$ .

Remarque : les réponses aux deux exemples précédents s’écrivent aussi  $5!$  et  $\frac{26!}{22!}$ .

### III. Tirages simultanés

#### 1. Les nombres “ $p$ parmi $n$ ”

##### *Exemple 5 :*

Anaïs (A), Bertrand (B), Camille (C), Dominique (D) et Émilie (E) participent à l’élection du délégué de classe. Combien de combinaison de délégués peut-on avoir à l’issue de l’élection ?

Dans cette question, il s’agit de choisir deux personnes au hasard parmi cinq. *Ces deux personnes jouent le même rôle et sont aussi importantes l’une que l’autre.* Il ne s’agit donc pas de tirages successifs car, par exemple, A puis B donne le même résultat que B puis A. Il y a donc *simultanéité*.

Dans cette situation, le *nom* de la réponse est le nombre **2 parmi 5**. On le note  $\binom{5}{2}$ .

Ce nombre porte également le nom de coefficient binomial (on verra plus loin pourquoi).

Comment le calculer ? Voici trois méthodes.

##### *Méthode 1 : “à la main”*

Quelles sont toutes les combinaisons possibles ?

N’oublions pas que AB et BA représente la même combinaison.

AB ; AC ; AD ; AE ; BC ; BD ; BE ; CD ; CE et DC.

Il y a donc 10 combinaisons possibles.  $\binom{5}{2} = 10$ .

Cette méthode est évidemment fastidieuse et risquée. Il est nécessaire d’utiliser d’autres méthodes dans le cas général.

**Méthode 2 : “le triangle de Pascal”**

Cette méthode donne une méthode de construction « magique » des nombres “parmi”.



| n \ p | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 |
|-------|---|---|----|----|----|---|---|
| 0     | 1 |   |    |    |    |   |   |
| 1     | 1 | 1 |    |    |    |   |   |
| 2     | 1 | 2 | 1  |    |    |   |   |
| 3     | 1 | 3 | 3  | 1  |    |   |   |
| 4     | 1 | 4 | 6  | 4  | 1  |   |   |
| 5     | 1 | 5 | 10 | 10 | 5  | 1 |   |
| 6     | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

$$\binom{5}{2} = 10$$

Le triangle de Pascal

**Règle de « construction » :**

Un nombre “parmi” est obtenu en ajoutant celui qui est au-dessus à celui qui est à gauche de celui qui est au-dessus.

Mathématiquement, si  $p$  vérifie  $0 \leq p \leq n-1$ , alors on a  $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ .

**Autres propriétés :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul :

$$\binom{n}{0} = 1 ; \binom{n}{n} = 1 ; \binom{n}{1} = n ;$$

Par symétrie, si  $p$  est un entier vérifiant  $0 \leq p \leq n$ , alors on a  $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ .

Cette méthode est pratique pour les nombres “parmi” qui ne sont pas trop grands.

Mais elle devient vite fastidieuse pour des nombres plus grands. Il y a donc une troisième méthode, plus compliquée, mais qui marche « toujours ».

**Méthode 3 : “par utilisation de la formule”**

Soit E un ensemble non vide contenant  $n$  éléments, et  $p$  un entier naturel tel que  $0 \leq p \leq n$ .

**Les nombres  $\binom{n}{p}$**

Le nombre de combinaisons à  $p$  éléments d'un ensemble parmi  $n$  éléments est noté  $\binom{n}{p}$ .

Ce nombre se lit «  $p$  parmi  $n$  ».

On a :  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$ .

$$\text{Dès lors : } \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{\overbrace{5 \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}^{5!}}{\underbrace{2 \times 1}_{2!} \times \underbrace{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}_{3!}} = \frac{20}{2} = 10.$$

**À retenir :**

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad ; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

**★ Exercice :**

Calculer :  $\binom{3}{0}$  ;  $\binom{3}{1}$  ;  $\binom{4}{3}$  ;  $\binom{4}{4}$  ;  $\binom{5}{2}$  ;  $\binom{7}{3}$

**Correction :**

$$\binom{3}{0} = 1 \text{ (formule } \binom{n}{0} = 1) \quad ; \quad \binom{3}{1} = 3 \text{ (formule } \binom{n}{1} = n) \quad ; \quad \binom{4}{3} = 4 \text{ (formule } \binom{n}{n-1} = n)$$

$$\binom{4}{4} = 1 \text{ (formule } \binom{n}{n} = 1) \quad ; \quad \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ (formule } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2})$$

$$\text{Par calcul : } \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{\overbrace{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}^{7!}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!} \times \underbrace{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}_{4!}} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{3} \times \cancel{2}} = 35.$$

Exemple d'application en théorie des jeux :

*Les nombres suivants se calculent à l'aide d'une calculatrice*

- Le nombre de mains au poker classique est égal à  $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ .
- Le nombre de tirages possibles du loto de la Française des Jeux est égal à :

$$\underbrace{\binom{49}{5}}_{\text{numéros}} \times \underbrace{\binom{10}{1}}_{\text{numéro chance}} = 19\,068\,840.$$

Vous avez 1 chance sur 19 068 840 de remporter le gros lot.

- Le nombre de tirages à l'EuroMillions est égal à  $\underbrace{\binom{50}{5}}_{\text{numéros}} \times \underbrace{\binom{12}{2}}_{\text{étoiles}} = 139\,838\,160$ .

Vous avez 1 chance sur 139 838 160 de remporter le gros lot.

## 2. Formule du binôme

Les coefficients binomiaux (les nombres “parmi”, donc) apparaissent dans les développements de  $(a+b)^n$  où  $a$  et  $b$  sont deux réels et  $n$  un entier naturel non nul.

La quantité  $a+b$ , constituée de deux termes, est un *binôme*.

- $(a+b)^1 = a+b = 1 \times a + 1 \times b = \binom{1}{0} \times a + \binom{1}{1} \times b$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0} \times a^2 + \binom{2}{1} \times a \times b + \binom{2}{2} \times b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{3}{0} \times a^3 + \binom{3}{1} \times a^2 \times b + \binom{3}{2} \times a \times b^2 + \binom{3}{3} \times b^3$

Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $n$  un entier naturel non nul :  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Une vidéo à regarder jusqu'à 6'40'' (les amateurs de curiosité pourront aller jusqu'à 11'30'') :

