Dénombrements
Exercices

Tirages successifs et simultanés

★ Exercice 15.1

1. Quel est le nombre de bulletins simples possibles au loto sportif ?
(principe : cocher 1 ou N ou 2 pour 13 matchs de football)
2. Quel est le nombre de "mots" s'écrivant à l'aide de 4 lettres ?
3. On lance trois dés. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
4. Combien y a-t-il d'entiers de 4 chiffres ?
5. Quel est le nombre de "mots" de 4 lettres commençant par un A ?
6. Combien peut-on former d'entiers de 3 chiffres contenant au moins l'un des chiffres 0, 3, 6, 9 ?

Correction :

1. Pour le 1^er^ match il y a 3 possibilités, pour le 2^e^ match il y a trois possibilités, etc. :
$\underbrace{3\times 3\times \ldots \times 3}_{13 \text{ matches}} = 3^{13}$ (ne pas le calculer).
2. Pour la 1^ère^ lettre il y a 26 possibilités, pour la 2^e^ il y a 26 possibilités, etc. :
$\underbrace{26\times 26\times 26\times 26}_{4 \text{ lettres}} = 26^4$ (ne pas le calculer).
3. Pour le 1^er^ dé il y a 6 possibilités, pour la 2^e^ il y a 6 possibilités, etc. : $\underbrace{6\times 6\times 6}_{3 \text{ dés}} = 6^3 = 216$.
4. Pour le 1^er^ chiffre, il y a 9 possibilités (de 1 à 9) car il ne peut pas commencer par 0 (le nombre n'aurait alors pas de millier et ne serait pas à 4 chiffres. Il y a 10 possibilités pour chacun des trois autres chiffres (de 0 à 9). Finalement, par principe multiplicatif, il y a :
$9\times 10\times 10\times 10 = 9\ 000$ entiers à 4 chiffres.
5. Pour la 1^ère^ lettre il y a un seul choix, le A et il y a 26 choix pour chacune des trois autres lettres. Par principe multiplicatif, il y a : $1\times 26\times 26\times 26 = 26^3$ (ne pas calculer).
6. Cette question (bonus) est la plus difficile.
- Important : il y a les mots « au moins un » $\rightarrow$ on pense à regarder la situation contraire qui est *aucun*.
- Combien y a-t-il d'entiers de 3 chiffres *ne contenant pas* l'un des chiffres 0, 3, 6, 9 ?
Pour le 1^er^ chiffre, on a 6 choix (au lieu de 10). Même chose pour le 2^e^ et 3^e^ chiffre.
Il y a donc $6\times 6\times 6 = 6^3 = 216$ entiers qui *ne contiennent pas* l'un des chiffres 0, 3, 6, 9.
- Combien y a-t-il d'entiers de 3 chiffres ? La question ressemble à la question 3 !
Il y a $9\times 10\times 10 = 900$ entiers à 3 chiffres.
- Finalement, la réponse est : $900 - 216 = 684$.

★ Exercice 15.2

1. Quel est le nombre d'arrivées possibles sur un tiercé de 21 chevaux ?
2. Quel est le nombre de "mots" s'écrivant à l'aide de 4 lettres distinctes ?

Correction :

1. Pour le 1[er] cheval (le gagnant) il y a 21 possibilités, pour le 2[e] cheval il n'y a plus que 20 possibilités et il n'y a plus que 19 possibilités pour le 3[e] cheval :
   $21\times20\times19=7\ 980$ (là, on pose le calcul).
2. Pour la 1[ère] lettre il y a 26 possibilités, pour la 2[e] il n'y a plus que 25 possibilités, etc. :
   $\underbrace{26\times25\times24\times23}_{\text{4 lettres distinctes}}=26^4$ (ne pas le calculer).

★ Exercice 15.3

1. Quel est le nombre de mains possibles au poker ?
   (mains de 5 cartes issues d'un jeu de 52 cartes)
2. Quel est le nombre de tirages possibles à l'Euro Millions ?
   (5 numéros parmi 50 puis 2 étoiles parmi 12)
3. Quel est le nombre de tirages possibles d'un loto comportant 4 nombres pairs et 2 nombres impairs ? (tirage de 6 numéros parmi 49)

Correction :

1. Réponse dans le cours : $\binom{52}{5}$ (on ne le calcule pas).
2. Réponse dans le cours : $\binom{50}{5}\times\binom{12}{2}$ (on ne le calcule pas).
3. - Il y a 24 numéros pairs (2, 4, …, 46 et 48). On en choisit 4 parmi eux : $\binom{24}{4}$.
   - Il y a 25 numéros impairs (1, 3, …, 47 et 49). On en choisit 2 parmi eux : $\binom{25}{2}$.
   - Par principe multiplicatif, le résultat est : $\binom{24}{4}\times\binom{25}{2}$.

★ Exercice 15.4

1. On tire successivement avec remise 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On tire successivement sans remise 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?
3. On tire simultanément 3 boules dans une urne contenant 8 boules.
Quel est le nombre de tirages possibles ?

Correction :

1. Il s'agit de 3 tirages avec remise dans une urne contenant 8 boules : $\underbrace{8\times8\times8}_{\text{3 boules}}=8^3=512$.

2. Il s'agit de 3 tirages sans remise dans une urne contenant 8 boules : $\underbrace{8\times7\times6}_{\text{3 boules}}=336$.

3. Il s'agit d'un tirage simultané : $\binom{8}{3}=\dfrac{8\,!}{3\,!\times5\,!}=\dfrac{\overbrace{8\times7\times6\times\cancel{5}\times\cancel{\ldots}}^{8\,!}}{\underbrace{3\times2\times1}_{3\,!}\times\underbrace{\cancel{5}\times\cancel{\ldots}}_{5\,!}}=\dfrac{8\times7\times\cancel{6}}{\cancel{3}\times\cancel{2}}=56$.

★ Exercice 15.5

On considère une main de 5 cartes issues parmi un jeu de 32 cartes.
1. Quelle est la probabilité d'avoir exactement une dame ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir exactement un trèfle ?

Correction :

Dans un jeu de 32 cartes, il y a toujours 4 couleurs (pique, cœur, carreau et trèfle), mais il n'y a plus que 8 valeurs (7, 8, 9, 10, V, D, R, A)

1. - On doit tirer une dame parmi 4 dames : $\binom{4}{1}$

- Il faut choisir 4 cartes parmi toutes celles qui ne sont pas des dames (il y en a $32-4=28$) : $\binom{28}{4}$

- Par principe multiplicatif, le nombre de tirages avec exactement une dame est : $\binom{4}{1}\times\binom{28}{4}$.

- De plus, le nombre de tirages total est : $\binom{32}{5}$ (5 cartes parmi 32)

- Finalement, la probabilité demandée est : $\dfrac{\binom{4}{1}\times\binom{28}{4}}{\binom{32}{5}}$ (nombre de cas favorables sur nombre de cas total)

2. Le concept est le même :

- On doit tirer un trèfle parmi 8 trèfles : $\binom{8}{1}$
- Il faut choisir 4 cartes parmi toutes celles qui ne sont pas des trèfles (il y en a $32-8=24$) : $\binom{24}{4}$
- Par principe multiplicatif, le nombre de tirages avec exactement une dame est : $\binom{8}{1}\times\binom{24}{4}$.
- De plus, le nombre de tirages total est : $\binom{32}{5}$ (5 cartes parmi 32)
- Finalement, la probabilité demandée est : $\dfrac{\binom{8}{1}\times\binom{24}{4}}{\binom{32}{5}}$ (nombre de cas favorables sur nombre de cas total)

Factorielles et nombres parmi

★ **Exercice 15.6**

1. Calculer 4!, 5! et 6!.
2. Simplifier sans utiliser la calculatrice $\frac{12!}{10!}$; $\frac{12!}{4!\,8!}$.
3. Exprimer en fonction de n, et sans factorielle, les nombres suivants :
$\frac{(n+1)!}{n!}$; $\frac{(n-1)!}{n!}$; $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Correction :

1. $4\,! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$; $5\,! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$; $6\,! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$

2. $$\frac{12\,!}{10\,!} = \frac{\overbrace{12\times 11\times \cancel{10}\times \cancel{9}\times \cancel{\ldots}}^{12\,!}}{\underbrace{\cancel{10}\times \cancel{9}\times \cancel{\ldots}}_{10\,!}} = 12\times 11 = 132.$$

$$\frac{12\,!}{4\,!\times 8\,!} = \frac{\overbrace{12\times 11\times 10\times 9\times \cancel{8}\times \cancel{7}\times \cancel{\ldots}}^{12\,!}}{\underbrace{4\times 3\times 2\times 1}_{4\,!}\times \underbrace{\cancel{8}\times \cancel{7}\times \cancel{\ldots}}_{8\,!}} = \frac{\cancel{12}\times 11\times 10\times 9}{\cancel{4}\times \cancel{3}\times 2\times 1} = \frac{11\times \cancel{10}\times 9}{\cancel{2}} = 11\times 5\times 9 = 495.$$

3. $$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\times \cancel{n}\times \cancel{(n-1)}\times \cancel{\ldots}}{\cancel{n}\times \cancel{(n-1)}\times \cancel{\ldots}} = n+1.$$

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{\cancel{(n-1)}\times \cancel{(n-2)}\times \cancel{\ldots}}{n\times \cancel{(n-1)}\times \cancel{(n-2)}\times \cancel{\ldots}} = \frac{1}{n}.$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\times n\times \cancel{(n-1)}\times \cancel{(n-2)}\times \cancel{\ldots}}{\cancel{(n-1)}\times \cancel{(n-2)}\times \cancel{\ldots}} = (n+1)\times n.$$

★ **Exercice 15.7**

1. Donner la valeur des expressions suivantes : $\binom{12}{8}$, $\binom{5}{4}$.

2. Exprimer en fonction de *n*, et sans factorielle, le nombre : $\binom{n}{2}$.

3. Calculer les nombres suivants :

$A=\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}$; $B=\binom{15}{1}+\binom{4}{3}$; $C=\binom{n}{0}$

$D=\binom{n}{1}$; $E=\binom{n}{n}$

Correction :

1. On calcule $\binom{12}{8}$ par formule. $\binom{12}{8}=\dfrac{12\,!}{4\,!\times 8\,!}$. On reconnait le calcul du 2. De l'exercice précédent.

$\binom{5}{4}=5$ (formule $\binom{n}{n-1}=n$)

2. $$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!\times(n-2)!}=\frac{\overbrace{n\times(n-1)\times\cancel{(n-2)}\times\cancel{(n-3)}\times\cancel{\ldots}}^{n\,!}}{\underbrace{2\times1}_{2!}\times\underbrace{\cancel{(n-2)}\times\cancel{(n-3)}\times\cancel{\ldots}}_{(n-2)!}}=\frac{n\times(n-1)}{2}.$$

On vient de démontrer le résultat noté dans l'encadré du cours.

3. $\binom{5}{2}=\dfrac{5\times4}{2}=10$ (formule précédente) et $\binom{4}{1}=4$ (formule $\binom{n}{1}=n$).

Donc $A=\binom{5}{2}\times\binom{4}{1}=10\times4=40$.

$\binom{15}{1}=15$ (formule $\binom{n}{1}=n$) et $\binom{4}{3}=4$ (formule $\binom{n}{n-1}=n$).

Donc $B=\binom{15}{1}+\binom{4}{3}=15+4=19$.

$C=\binom{n}{0}=1$, $D=\binom{n}{1}=n$ et $E=\binom{n}{n}=1$ par cours

E.C.P.1 – Jean PERRIN

Formule du binôme

★ Exercice 15.8

a) Rappeler la formule du binôme.

b) Donner les trois termes de plus bas degré de : $(1+x)^n$.

Correction :

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

2. On remplace a par 1 et b par x :

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1)^{n-k} (x)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ car $1^{\text{puissance n'importe quoi}} = 1$.

Pour obtenir le terme de plus bas degré (le terme constant), on remplace k par 0.

On obtient : $\binom{n}{0} x^0 = 1$.

Pour obtenir le terme de degré 1 (le terme en x), on remplace k par 1.

On obtient : $\binom{n}{1} x^1 = n\,x$.

Pour obtenir le terme de degré 1 (le terme en x^2), on remplace k par 2.

On obtient : $\binom{n}{2} x^2 = \frac{n(n-1)}{2} x^2$.