Fonction exponentielle

I. Notion de fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\ ;b]$ de $\mathbb{R}$. Elle prend, une fois et une seule, toute valeur réelle comprise dans $\left[f(a)\ ;\ f(b)\right]$.

On dit que f est une bijection de l'intervalle $[a\ ;b]$ sur l'intervalle $\left[f(a)\ ;\ f(b)\right]$. Elle admet donc une bijection réciproque f^{-1} de l'intervalle $\left[f(a)\ ;\ f(b)\right]$ sur l'intervalle $[a\ ;b]$.

$$\forall x \in I,\ \forall y \in f(I),\ y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(x)$$

Par extension, l'intervalle *I* peut être ouvert ou semi-ouvert.

Si f est continue strictement monotone sur *I*, f admet une fonction réciproque f^{-1} continue strictement monotone sur $f(I)$ et variant dans le même sens que f.

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice du repère.

II. Définition – Relation fonctionnelle

1. Définition

La fonction ln est strictement croissante de $]0\ ;+\infty[$ sur $]-\infty\ ;+\infty[$.

Alors pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;+\infty[$, l'équation $\ln y = x$ admet une unique solution dans]0 ; +∞[: e^x.

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction réciproque de ln.

exp : $x \to \mathrm{e}^x$ définie par $x = \ln\left(\mathrm{e}^x\right)$

$\mathbb{R} \to]0\ ;+\infty[$

Conséquences immédiates :

- exp est définie sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$.
- $\mathrm{e}^0 = 1$; $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

- Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right)=x$.
- Pour tout réel $x>0$ $e^{\ln x}=x$.
- exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (on sait, par symétrie, à quoi elle ressemble…)

2. Relation fonctionnelle

La fonction ln “transforme un produit en somme”. La fonction exp “transforme une somme en produit”. On admet les théorèmes suivants :

Pour tous nombres réels a et b,

$e^{a+b}=e^a\times e^b$; $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$; $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$; pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\left(e^a\right)^n=e^{an}$

<u>Remarque</u> :
Les propriétés ci-dessus justifient d’autant mieux la notation e^x.

III. Étude des variations de exp

1. Sens de variation. Signe

Dériver $x=\ln\left(e^x\right)$. En déduire $\left(e^x\right)'$.

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée.
Si $f(x)=e^x$, alors $f'(x)=e^x$.

Or $e^x>0$ sur $\mathbb{R}$…
On en déduit le tableau de variations…

2. Limites en - ∞ et en + ∞.

À l’aide de la calculatrice, on constate que lorsque x augmente, e^x augmente très vite.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$$

Par ailleurs, lorsque x se rapproche de – ∞, e^x se rapproche de 0.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$$

La courbe représentative de exp admet donc $y=0$ pour asymptote horizontale en – ∞.

3. Courbe représentative

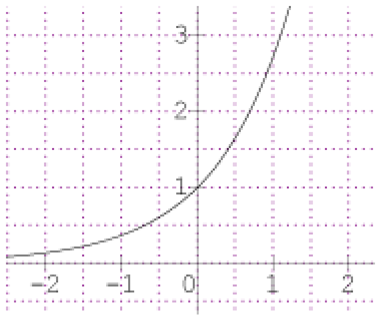
Finalement, le **tableau de variation de exp** est :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

Quelques valeurs approchées :

Valeur exacte exp	e^{-2}	e^{-1}	e^{0}	e^{1}	e^{2}
Valeur exacte ou approchée	$\approx 0,1$	$\approx 0,4$	1	$\approx 2,7$	$\approx 7,4$

Le graphique de exp est :



IV. Fonctions de la forme e ^{u}

1. Dérivée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

★ **Exercice**

Déterminer les dérivées de :

1. $f : x \to e^{2x}$ **2.** $f : x \to e^{4x-3}$ **3.** $f : x \to e^{-x}$ **4.** $f : x \to e^{x^2}$

2. Primitive

Si sur un intervalle I une fonction g est telle que $g(x) = u'(x)e^{u(x)}$ alors les primitives G de g sur I sont définies par $G(x) = e^{u(x)} + C$ où C est une constante réelle.

★ **Exercice**

Déterminer une primitive des fonctions :

1. $f : x \to e^{2x}$ **2.** $f : x \to e^{4x-3}$ **3.** $f : x \to e^{-x}$ **4.** $f : x \to xe^{x^2}$