

Fonction exponentielle

Exercices

★ Exercice 16.1

Ecrire sous la forme d'une puissance de e les expressions suivantes :

$$\mathbf{1.} \quad \frac{e^7}{e^2}$$

$$2. \frac{(e^{-1})^4}{e}$$

Correction :



Rappel : $e^a \times e^b = e^{a+b}$, $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $(e^a)^n = e^{a \times n}$.

- $\frac{e^7}{e^2} = e^{7-2} = e^5.$

$$2. \frac{(e^{-1})^4}{e} = \frac{e^{-1 \times 4}}{e} = \frac{e^{-4}}{e^1} = e^{-4-1} = e^{-5}.$$

★ Exercice 16.2

Pour chacune des fonctions ci-dessous :

- préciser l'ensemble de définition,
- calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition,
- calculer la dérivée,
- déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.

1. $f(x) = e^x + 2x$

2. $f(x) = e^x - x$

3. $f(x) = xe^x$

4. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

5. $f(x) = e^{2x}$

6. $f(x) = e^{-x}$

7. $f(x) = (e^x - 1)^2$

8. $f(x) = (x+3)e^{-x}$

9. $f(x) = x + 4e^{-x}$

10. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$

11. $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$

12. $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

Correction :

1. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = e^x + 2x$.

☆ **Ensemble de définition :**

f est définie sur $\mathbb{R}$.

☆ **Limites :**

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Rappel : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

☆ **Dérivée :**

$$f'(x) = e^x + 2$$



Rappel : $(e^x)' = e^x$ et $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

☆ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

2. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = e^x - x$.

★ Ensemble de définition :

f est définie sur $\mathbb{R}$.

★ Limites :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$



Rappel : « $+\infty - \infty$ » est la seule forme indéterminée relative à l'addition ou à la soustraction.

★ Dérivée :

$$f'(x) = e^x - 1$$

★ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:



Remarque : ici, le signe de $f'(x)$ n'est plus « évident ». On pose l'inéquation.

$$\begin{array}{lll} e^x - 1 \geq 0 & \text{ou bien} & e^x - 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow e^x \geq 1 & & \Leftrightarrow e^x \geq 1 \\ \Leftrightarrow e^x \geq e^0 & & \Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln(1) \\ \Leftrightarrow x \geq 0 & & \Leftrightarrow x \geq 0 \end{array}$$



Rappel : $e^a \leq e^b$
 $\Leftrightarrow a \leq b$

Le symbole « $\leq$ » peut être remplacé par « $<$ » ou « $\geq$ » ou « $>$ ».



Rappel : $\ln(e^x) = x$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

$$f(0) = e^0 - 0 = 1 - 0 = 1.$$

3. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = x e^x$.

★ **Ensemble de définition :**

f est définie sur $\mathbb{R}$.

★ **Limites :**

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

★ **Dérivée :**

$(u \times v)' = u'v + v'u$, donc :

$$f'(x) = (1) \times (e^x) + (x) \times (e^x) = e^x + x e^x = e^x (x+1).$$



Bien penser à factoriser par e^x pour préparer l'étude du signe qui va suivre.

★ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $x+1$.

$$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

$$f(-1) = (-1)e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

4. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

★ Ensemble de définition :



Il y a un dénominateur. Il est nécessaire que le dénominateur soit différent de 0.

f est définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$.

★ Limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissances comparées (c'est une limite de cours).

$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\}$ par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.



Rappel : « $\frac{0}{\infty}$ » et « $\frac{\infty}{0}$ » ne sont pas des formes indéterminées.

En termes de limites : $\frac{0}{\infty} = 0$ et $\frac{\infty}{0} = \infty$ (reste à déterminer si c'est $-\infty$ ou $+\infty$).

$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^- \end{array} \right\}$ par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
 $\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+ \end{array} \right\}$ par quotient de limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale.

★ Dérivée :

$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{(e^x) \times (x) - (1) \times (e^x)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$



Bien penser à factoriser par e^x pour préparer l'étude du signe qui va suivre.

★ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $e^x > 0$ sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$.
- $x^2 > 0$ sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$.

Donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ 0 $+$	
f	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow e \nearrow +\infty$	

$$f(1) = \frac{e}{1} = e.$$

5. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = e^{2x}$.

★ **Ensemble de définition :**

f est définie sur $\mathbb{R}$.

★ **Limites :**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \text{par composée de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{par composée de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

★ **Dérivée :**

$$f'(x) = 2e^{2x}$$



Rappel : $(e^{ax})' = ae^{ax}$ donc $(e^{2x})' = 2e^{2x}$.

★ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ car une exponentielle est toujours positive.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty \nearrow +\infty$	

6. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = e^{-x}$.

★ **Ensemble de définition :**

f est définie sur $\mathbb{R}$.

★ **Limites :**

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array}$$

★ **Dérivée :**

$$f(x) = -e^{-x}$$



Rappel : $(e^{ax})' = a e^{ax}$ donc $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

★ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

$f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$ car une exponentielle est toujours positive.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	$-\infty$

7. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = (e^x - 1)^2$.

★ **Ensemble de définition :**

f est définie sur $\mathbb{R}$.

★ **Limites :**

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -1} X^2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} X^2 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par composée de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

★ Dérivée :

$$(u^2)' = 2 \times u' \times u, \text{ donc :}$$

$$f'(x) = 2 \times (e^x) \times (e^x - 1) = 2e^x(e^x - 1).$$

★ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $2 > 0$
- $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 1$.

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	1	0	$+\infty$

$$f(0) = (e^0 - 1)^2 = (1 - 1)^2 = 0.$$

8. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = (x+3)e^{-x}$.

★ Ensemble de définition :

f est définie sur $\mathbb{R}$.

★ Limites :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array}$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

★ Dérivée :

$$(u \times v)' = u'v + v'u, \text{ donc :}$$

$$f'(x) = (1) \times (e^{-x}) + (-e^{-x}) \times (x+3) = (e^{-x})[1 - (x+3)] = (e^{-x})[1 - x - 3] = e^{-x}(-x - 2).$$



Bien penser à factoriser par e^{-x} pour préparer l'étude du signe qui va suivre.

★ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

$e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f'(x)$ est du signe de $-x-2$.

$$-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	e^2	0

$$f(-2) = (-2+3)e^{-(-2)} = e^2.$$

9. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = x + 4e^{-x}$.

★ **Ensemble de définition :**

f est définie sur $\mathbb{R}$.

★ **Limites :**

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 4e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

★ **Dérivée :**

$$f'(x) = 1 - 4e^{-x}$$

★ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$1 - 4e^{-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4e^{-x} \geq -1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{-x}) \leq \ln\left(\frac{1}{4}\right) \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.$$

$$\Leftrightarrow -x \leq \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln(4) = -2\ln(2) \text{ (rappels : } \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \text{ et } \ln(a^2) = 2\ln(a))$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2\ln(2)$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$2\ln(2)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$2\ln(2)+1$	$+\infty$

$$f(2\ln 2) = 2\ln 2 + 4e^{-2\ln 2} = 2\ln 2 + 4e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = 2\ln 2 + 4 \times \left(\frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 + 1.$$

10. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$.

★ **Ensemble de définition :**



Il y a un dénominateur. Il est nécessaire que le dénominateur soit différent de 0.

Or $e^x > 0$. Par suite $e^x + 2 > 0$ et f est définie sur $\mathbb{R}$.

★ **Limites :**

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2} \end{array} \quad \cdot \quad y = -\frac{1}{2} \text{ est asymptote horizontale en } -\infty.$$



Ici, en $+\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Mais on ne peut pas appliquer les croissances comparées puisque les fonctions en jeu comportent toutes deux des exponentielles dominantes.



Astuce : on « modifie » l'expression de $f(x)$ en multipliant par $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$.

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \frac{e^x - 1}{e^x + 2} = \frac{e^{-x}(e^x - 1)}{e^{-x}(e^x + 2)} = \frac{e^{-x} \times e^x - e^{-x} \times 1}{e^{-x} \times e^x + e^{-x} \times 2} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}. \text{ Dès lors :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 2e^{-x} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \end{array} \quad \cdot \quad y = 1 \text{ est asymptote horizontale en } +\infty.$$

★ Dérivée :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc :}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x) \times (e^x + 2) - (e^x) \times (e^x - 1)}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^x[(e^x + 2) - (e^x - 1)]}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^x[e^x + 2 - e^x + 1]}{(e^x + 2)^2} = \frac{3e^x}{(e^x + 2)^2}$$



Bien penser à factoriser par e^x pour préparer l'étude du signe qui va suivre.

★ Signe de la dérivée et tableau des variations :

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $3e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.
- $(e^x + 2)^2 > 0$ car un carré est toujours positif et $e^x + 2 \neq 0$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	+
f	$-\frac{1}{2}$ $\nearrow$ 1

11. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$.

★ Ensemble de définition :



Il y a un dénominateur. Il est nécessaire que le dénominateur soit différent de 0.

$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Finalement, f est définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$.

★ Limites :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - 3 = -3$ } par quotient de limites,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$ } $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$. $y = 3$ est asymptote horizontale en $-\infty$.



En $+\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Mais on ne peut pas appliquer les croissances comparées puisque les fonctions en jeu comportent toutes deux des exponentielles dominantes.



Astuce : on « modifie » l'expression de $f(x)$ en multipliant par $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$.

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \frac{2e^x - 3}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}(2e^x - 3)}{e^{-x}(e^x - 1)} = \frac{2 - 3^{-x}}{1 - e^{-x}}. \text{ Dès lors :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - 3^{-x} = 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \end{array} \quad . \quad y = 2 \text{ est asymptote horizontale en } +\infty.$$



Pour les limites en 0, il est nécessaire d'étudier, d'abord, le signe du dénominateur.

$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. On a donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$

Finalement :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^x - 3 = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 = 0^- \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} 2e^x - 3 = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 1 = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array}$$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale.

☆ **Dérivée :**

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc :}$$

$$f'(x) = \frac{(2e^x) \times (e^x - 1) - (e^x) \times (2e^x - 3)}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^x \times e^x - 2e^x - 2e^x \times e^x + 3e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

☆ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $e^x > 0$ sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
- $(e^x - 1)^2 > 0$ car un carré est toujours positif et $e^x - 1 \neq 0$ sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	$3 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 2$

12. Étude complète de la fonction f définie par : $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.

★ **Ensemble de définition :**

f est définie sur $\mathbb{R}$.

★ **Limites :**

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -2e^x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array}.$$



En $+\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Mais on ne peut pas appliquer les croissances comparées puisque les fonctions en jeu comportent toutes deux des exponentielles dominantes.



Astuce : on « modifie » l'expression de $f(x)$ en factorisant par e^x car $e^{2x} = e^x \times e^x$.

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x = e^x \times e^x - 2e^x = e^x(e^x - 2). \text{ Dès lors :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 2 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}.$$

★ **Dérivée :**

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$$

★ **Signe de la dérivée et tableau des variations :**

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$\bullet \quad 2e^x > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 1$.

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	-1	$+\infty$

$$f(0) = e^{2 \times 0} - 2e^0 = 1 - 2 = -1.$$

★ Exercice 16.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Correction :



Pour déterminer une équation de la tangente à la courbe d'une fonction f en un point d'abscisse a , on procède en trois étapes :

- ① On calcule $f(a)$.
- ② On calcule $f'(a)$.
- ③ Une équation de la tangente à la courbe de f en un point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

① $f(0) = e^{-2 \times 0} = 1.$

② $f'(x) = -2e^{-2x}$ donc $f'(0) = -2.$

③ Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -2(x - 0) + 1 = -2x + 1.$$

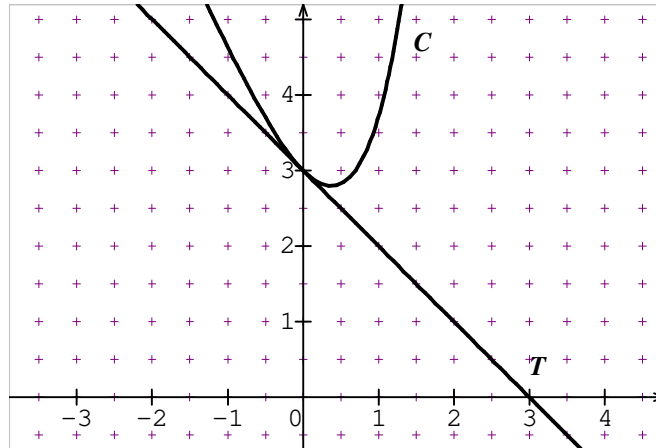
★ Exercice 16.4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b + xe^x,$$

où a et b sont des réels.

Sur le graphique ci-dessous, on donne sa courbe représentative C et la tangente T à C au point d'abscisse 0.



1. Indiquer, à l'aide du graphique, $f(0)$ et $f'(0)$.
2. En déduire la valeur de chacune des constantes a et b .

Correction :

1. Graphiquement, $f(0) = 3$.



$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente.

Comment lire un coefficient directeur ?

Une méthode : quand on avance de 1 par rapport à un point de la droite, la hauteur (positive si on monte, négative si on descend) correspond au coefficient directeur.

Donc graphiquement, $f'(0) = -1$.

2. $f(x) = ax + b + xe^x$, donc $f(0) = a \times 0 + b + 0 \times e^0 = b$.

Comme graphiquement $f(0) = 3$, on en déduit que $b = 3$.

$(w + u \times v)' = w' + u'v + v'u$, donc :

$$f'(x) = a + (1) \times (e^x) + (x) \times (e^x) = a + e^x + xe^x. \text{ D'où : } f'(0) = a + e^0 + 0e^0 = a + 1.$$

Comme graphiquement $f'(0) = -1$, on en déduit que $a + 1 = -1 \Leftrightarrow a = -2$.

★ Exercice 16.5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe de f admet une asymptote oblique que l'on précisera.
3. a) Calculer $f'(x)$.
b) Déterminer le tableau complet des variations de f .
c) En déduire de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier la position relative de la courbe de la fonction exponentielle et de la droite d'équation $y = x + 1$.
5. Donner l'allure de la courbe de f .

Correction :

1.



Astuce : pour que la méthode du « point, point, accolade » soit plus simple à mettre en place, on écrit $f(x)$ sous la forme : $f(x) = e^x + (-x - 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 1 = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x - 1 = -\infty \end{array} \right\} \text{par croissances comparées,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



2. Si $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, alors la courbe de f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote oblique en $\pm\infty$.

$f(x) = -x - 1 + e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. La courbe de f admet pour asymptote oblique en $-\infty$ la droite d'équation $y = -x - 1$.

3. a) $f'(x) = e^x - 1$

b) $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	0	$+\infty$

$f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

c) D'après le tableau des variations de f , 0 est minimum sur $\mathbb{R}$. Donc $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.



4. Pour déterminer la position relative de la courbe d'une fonction $g(x)$ et de la droite d'équation $y = ax + b$:

① On calcule $g(x) - (ax + b)$.

② On détermine le signe de $g(x) - (ax + b)$.

➤ Si $g(x) - (ax + b) \geq 0$ alors la courbe est au-dessus de la droite.

Si $g(x) - (ax + b) \leq 0$ alors C est au-dessous de D .

Dans cette question, on a : $e^x - (x + 1) = e^x - x - 1 = f(x)$.

Or, d'après la question précédente, $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la courbe de la fonction exponentielle est au-dessus de la droite d'équation $y = x + 1$.

5. ① On construit les axes proprement au crayon gris.

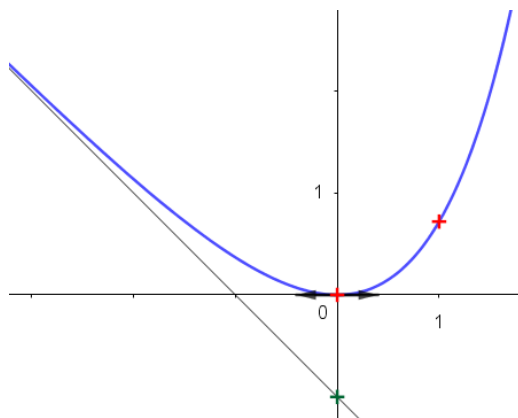
② On place les points d'abscisse 0 et 1. $f(0) = 0$ et $f(1) = e^1 - 1 - 1 = e - 2 \approx 0,7$.

③ On construit la tangente horizontale au point d'abscisse 0.

④ On construit l'asymptote. Elle passe par les points :

⑤ On complète avec l'allure de la courbe.

x	0	2
y	-1	-3



★ Exercice 16.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x}{2+e^x}$.

1. Démontrer que $f(x) = \frac{3}{2e^{-x} + 1}$.
2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Étudier les variations de la fonction f .

Correction :

1. Astuce déjà vue : on multiplie $f(x)$ par $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$: $f(x) = \frac{3e^x}{2+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \frac{3e^x}{2+e^x} = \frac{3}{2e^{-x} + 1}$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{-x} + 1) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{-x} + 1) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

3. $\left(\frac{k}{v}\right)' = -k \times \frac{v'}{v^2}$. Donc : $f'(x) = -3 \times \frac{-2e^{-x}}{(2e^{-x} + 1)^2} = \frac{6e^{-x}}{(2e^{-x} + 1)^2}$.

$6e^{-x} > 0$ et $(2e^{-x} + 1)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

On en déduit le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow 3$

★ Exercice 16.7

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

1. Quel est le signe de la fonction $f(x)$?
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x . Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = f(2x)$.

Correction :

1. $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux termes positifs sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}e^{-x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

3. $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

$$\begin{aligned} & e^x - e^{-x} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & e^x \geq e^{-x} \\ \Leftrightarrow & \ln(e^x) \geq \ln(e^{-x}) \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[\\ \Leftrightarrow & x \geq -x \\ \Leftrightarrow & 2x \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit le signe de $f'(x)$ puis le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

$$f(0) = \frac{1}{2}(e^0 + e^{-0}) = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & (f(x))^2 + (f'(x))^2 = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\
 \Leftrightarrow & (f(x))^2 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}\left((e^x)^2 + 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2\right) + \frac{1}{4}\left((e^x)^2 - 2 \times e^x \times e^{-x} + (e^{-x})^2\right) \\
 \Leftrightarrow & (f(x))^2 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \\
 \Leftrightarrow & (f(x))^2 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}\left[(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) + (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\right] \\
 \Leftrightarrow & (f(x))^2 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}\left[e^{2x} + 2 + e^{-2x} + e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right] \\
 \Leftrightarrow & (f(x))^2 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}\left[2e^{2x} + 2e^{-2x}\right] = \frac{2(e^{2x} + e^{-2x})}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = f(2x)
 \end{aligned}$$

★ Exercice 16.8

Initiation à la démonstration par récurrence.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$.
3. D'après vous, sans la calculer, quelle serait l'expression de la dérivée 5^e de f , $f^{(5)}(x)$?
Conjecturer pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}(x)$.

Correction :

1. $(uv)' = u'v + v'u$. Donc $f'(x) = 1 \times e^x + e^x \times x = e^x(x+1)$.
2. Pour calculer $f''(x)$, il faut dériver $f'(x)$.
 $(uv)' = u'v + v'u$. Donc $f''(x) = e^x(x+1) + 1 \times e^x = e^x(x+2)$.
3. On peut supposer que $f^{(5)}(x) = e^x(x+5)$ puis conjecturer que $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$.

Le raisonnement par récurrence

I. Introduction

Il existe de nombreux raisonnements logiques (raisonnement direct, raisonnement par l'absurde, raisonnement par disjonction des cas, utilisation d'un contre-exemple, recours à la contraposée...). Cette leçon n'a pas pour but de revenir sur ces différents raisonnements.

Le raisonnement par récurrence est un autre raisonnement logique particulièrement bien adapté aux propriétés relatives à un **entier naturel quelconque**.

Exemple :

Considérons la propriété suivante :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

Pour tout entier naturel n (on note $\forall n \in \mathbb{N}$), $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$.

On souhaite démontrer que cette propriété est vraie **pour tout entier naturel n** .

Une (très mauvaise) stratégie pour prouver cette propriété (à supposer qu'elle soit vraie) consisterait à prouver cette propriété pour des valeurs de n (on parle alors de *rang* de la propriété).

Pour $n=0$ (qui est le rang initial ou encore le premier rang) :

$e^x(x+0) = xe^x = f(x) = f^{(0)}(x)$. On dit que la propriété est vraie au rang 0.

De la même façon, $f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x(x+1)$ (après calcul). La propriété est vraie au rang 1.

$f^{(2)}(x) = f''(x) = (f'(x))' = e^x(x+2)$ (après calcul). La propriété est vraie au rang 2...

On comprend vite pourquoi cette façon de raisonner est une très mauvaise stratégie : pour prouver que la propriété est vraie, il faudrait effectuer les calculs... pour TOUS les rangs. Ce qui est bien sûr impossible et absurde.

II. Principe

Aussi curieux que cela puisse paraître, il est possible de démontrer une propriété concernant un nombre infini d'entiers en deux étapes (hors étape de conclusion) !!

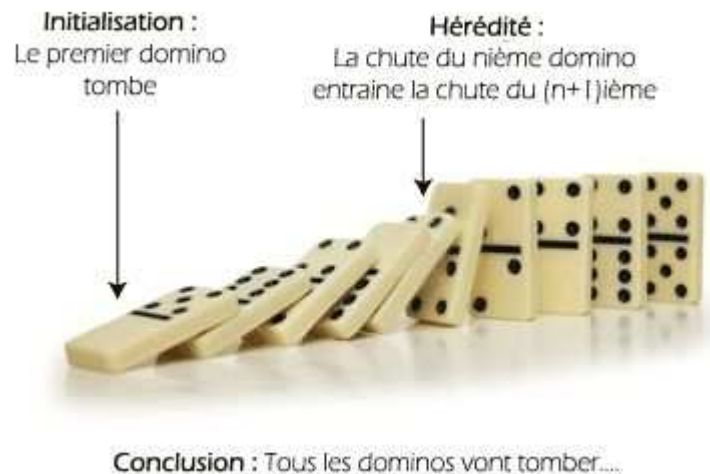
Une illustration :

| On dispose d'un nombre infini de dominos. On souhaite tous les faire tomber.



Pour garantir la chute de TOUS les dominos, seules deux conditions (si, si) doivent être remplies :

- il faut, bien sûr que le premier domino tombe !! (on parle d'initialisation)
- il faut avoir la garantie que les dominos soient convenablement espacés, c'est-à-dire que, si un domino tombe, il fera à coup sûr tomber le suivant (on parle alors d'hérédité).



Le principe de récurrence consiste à conclure que si une propriété est à la fois initialisée et héréditaire alors, elle est vraie.

III. Premières démonstrations par récurrence, rédaction type

Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$.

Initialisation :

$f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x(x+1)$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$. Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(e^x(x+n)\right)'.$$

Or : $(uv)' = u'v + v'u$. Donc $\left(e^x(x+n)\right)' = e^x(x+n) + 1 \times e^x = e^x(x+n+1) = e^x(x+(n+1))$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Remarques :

- Dans l'esprit ECT, une question du type « démontrer que, pour tout entier naturel $n...$ » sera le plus souvent (mais pas toujours...) démontrée par récurrence.
- Il y a de nombreuses démonstrations par récurrence à effectuer dans les sujets de concours.

★ Exercice 16.9

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x + x + 1.$$

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\mathbb{R}$.

Justifier que $\alpha \in [-2; -1]$. (On donne $e^{-1} \approx 0,4$ et $e^{-1} \approx 0,1$).

- b) Que permet d'obtenir le programme Python suivant ?

```
import numpy as np
alpha=-2
while np.exp(alpha)+alpha+1<0:
    alpha=alpha+0.01
print(alpha-0.01,alpha)
```

3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1}.$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

1. Le programme Python précédent affiche :

-1.2799999999999994 -1.2699999999999994

Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en donner une valeur approchée à 0,1 près.

2. a) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $f(x)$.

Interpréter graphiquement le résultat en $-\infty$ et montrer que la courbe de f admet la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$.

- b) Montrer que, pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

- c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Correction :

Partie A :

1. $g'(x) = e^x + 1 > 0$ car une exponentielle est toujours positive.

g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Déterminons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \end{array} \right\} \text{par somme de limites,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Pour montrer que l'équation $g(x) = c$ admet une unique solution sur un intervalle I :

- ① On précise que g est continue sur I .
- ② On précise que g est strictement monotone sur I .
- ③ On précise que $c \in g(I)$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = c$ admet une unique solution sur I .

- ① g est continue sur $\mathbb{R}$.
- ② g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ③ $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc $0 \in g(\mathbb{R})$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

$$g(-2) = e^{-2} - 2 + 1 = e^{-2} - 1 \approx -0,9 < 0 \text{ et } g(-1) = e^{-1} - 1 + 1 = e^{-1} \approx 0,4 > 0.$$

$$\text{Donc } \alpha \in [-2; -1].$$

b) Le programme permet de déterminer un encadrement de α à 0,01 près.

3. D'après les questions précédentes, g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$.

On en déduit le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Partie B :

1. $f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1}$. De plus, $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = -\alpha - 1$.

Donc $f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1} = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha} = -(-\alpha-1) = \alpha + 1$.

D'après le programme SCILAB, $\alpha \approx -1,3$. On en déduit : $f(\alpha) \approx -0,3$.



2. a) En $-\infty$, la technique de « point, point, accolade, point, accolade » s'impose.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array} \right.$$

La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale en $-\infty$.



En $+\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Mais on ne peut pas appliquer les croissances comparées puisque les fonctions en jeu comportent toutes deux des exponentielles dominantes.



Astuce : on « modifie » l'expression de $f(x)$ en multipliant par $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$.

$$f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \frac{x e^x}{e^x + 1} = \frac{x}{1 + e^{-x}}. \text{ Dès lors :}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient de limites,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{array}.$$



Pour montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$:

① On calcule $f(x) - (ax + b)$.

② On montre que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{x e^x}{e^x + 1} - x = \frac{x e^x - x(e^x + 1)}{e^x + 1} = \frac{x e^x - x e^x - x}{e^x + 1} = \frac{-x}{e^x + 1}.$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{array}{l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 1 = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par croissances comparées,} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x + 1} = 0 \end{array}.$$

La droite d'équation $y = x$ est bien asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

$$\text{b) } \left(\frac{u \times w}{v} \right)' = \frac{(u'w + w'u)v - v'(uw)}{v^2}.$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{(e^x + x e^x)(e^x + 1) - (e^x) x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x + x e^{2x} + x e^x - x e^{2x}}{(e^x + 1)^2}.$$

$$\text{Finalement, } f'(x) = \frac{e^{2x} + e^x + x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x (e^x + 1 + x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}.$$

c) Étudions le signe de $f'(x)$.

$e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On en déduit les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$f(\alpha)$	$+\infty$