

Fonction exponentielle
Exercices

★ **Exercice 16.1**

Ecrire sous la forme d'une puissance de e les expressions suivantes :

1. $\frac{e^7}{e^2}$ 2. $\frac{(e^{-1})^4}{e}$

★ **Exercice 16.2**

Pour chacune des fonctions ci-dessous :

- préciser l'ensemble de définition,
- calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition,
- calculer la dérivée,
- déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction.

1. $f(x) = e^x + 2x$	2. $f(x) = e^x - x$	3. $f(x) = x e^x$
4. $f(x) = \frac{e^x}{x}$	5. $f(x) = e^{2x}$	6. $f(x) = e^{-x}$
7. $f(x) = (e^x - 1)^2$	8. $f(x) = (x + 3)e^{-x}$	9. $f(x) = x + 4e^{-x}$
10. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$	11. $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$	12. $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

★ **Exercice 16.3**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

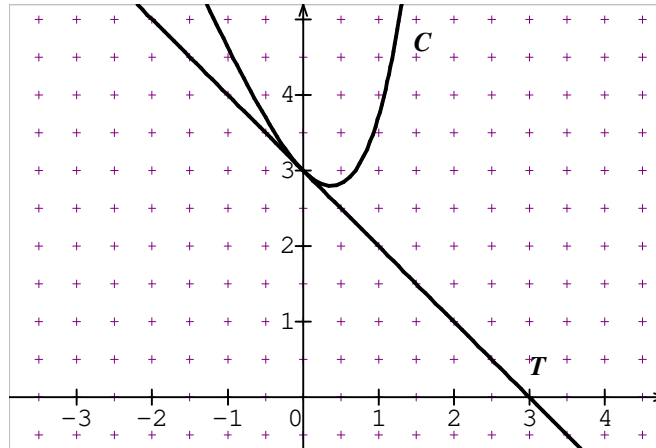
★ **Exercice 16.4**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b + xe^x,$$

où a et b sont des réels.

Sur le graphique ci-dessous, on donne sa courbe représentative C et la tangente T à C au point d'abscisse 0.



1. Indiquer, à l'aide du graphique, $f(0)$ et $f'(0)$.
2. En déduire la valeur de chacune des constantes a et b .

★ **Exercice 16.5**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que la courbe de f admet une asymptote oblique que l'on précisera.
3. a) Calculer $f'(x)$.
b) Déterminer le tableau complet des variations de f .
c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier la position relative de la courbe de la fonction exponentielle et de la droite d'équation $y = x + 1$.
5. Donner l'allure de la courbe de f .

★ Exercice 16.6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x}{2+e^x}$.

1. Démontrer que $f(x) = \frac{3}{2e^{-x}+1}$.
2. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Étudier les variations de la fonction f .

★ Exercice 16.7

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

1. Quel est le signe de la fonction $f(x)$?
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x . Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens des variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = f(2x)$.

★ Exercice 16.8

Initiation à la démonstration par récurrence.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f''(x)$.
3. D'après vous, sans la calculer, quelle serait l'expression de la dérivée 5^e de f , $f^{(5)}(x)$?
Conjecturer pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}(x)$.

★ Exercice 16.9

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x + x + 1.$$

1. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\mathbb{R}$.

Justifier que $\alpha \in [-2; -1]$. (On donne $e^{-1} \approx 0,4$ et $e^{-1} \approx 0,1$).

- b) Que permet d'obtenir le programme Python suivant ?

```
import numpy as np
alpha=-2
while np.exp(alpha)+alpha+1<0:
    alpha=alpha+0.01
print(alpha-0.01,alpha)
```

3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}.$$

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

1. Le programme Python précédent affiche :

-1.2799999999999994 -1.2699999999999994

Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en donner une valeur approchée à 0,1 près.

2. a) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $f(x)$.

Interpréter graphiquement le résultat en $-\infty$ et montrer que la courbe de f admet la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$.

- b) Montrer que, pour tout x réel, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

- c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.