

Variance d'une v.a.r. Exercices
--

Calculs de variances

★ Exercice 17.1

On considère la variable aléatoire X de loi de probabilité :

x_i	1	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

Calculer la variance de X .

Correction :



Remarque : pour calculer une variance, on procède en trois étapes :

- ① On calcule l'espérance de X : $E(X)$.
- ② On calcule l'espérance de X^2 : $E(X^2)$.
- ③ On applique la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Ici :

① $E(X) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,1 = 0,4 + 0,6 + 0,6 + 0,4 = 2$

② $E(X^2) = 1^2 \times 0,4 + 2^2 \times 0,3 + 3^2 \times 0,2 + 4^2 \times 0,1$

$\Leftrightarrow E(X^2) = 1 \times 0,4 + 4 \times 0,3 + 9 \times 0,2 + 16 \times 0,1$

$\Leftrightarrow E(X^2) = 0,4 + 1,2 + 1,8 + 1,6$

$\Leftrightarrow E(X^2) = 5$

- ③ D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1.$$

★ Exercice 17.2

On considère la variable aléatoire X de loi de probabilité :

x_i	1	2	3	4
p_i	0,4	0,2	0,3	0,1

Calculer la variance de X .

Correction :

① $E(X) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,3 + 4 \times 0,1 = 0,4 + 0,4 + 0,9 + 0,4 = 2,1$

② $E(X^2) = 1^2 \times 0,4 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,3 + 4^2 \times 0,1$

$\Leftrightarrow E(X^2) = 1 \times 0,4 + 4 \times 0,2 + 9 \times 0,3 + 16 \times 0,1$

$\Leftrightarrow E(X^2) = 0,4 + 0,8 + 2,7 + 1,6$

$\Leftrightarrow E(X^2) = 5,5$

③ D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5,5 - 2,1^2 = 5,5 - 4,41 = 1,09.$$

★ Exercice 17.3

On considère la variable aléatoire X de loi de probabilité :

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

1. Calculer $p(X \leq 2,4)$ puis calculer $p(0,2 < X \leq 2,8)$.

2. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type.

Correction :

1. $p(X \leq 2,4) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = 0,1 + 0,3 + 0,4 = 0,8$

$$p(0,2 < X \leq 2,8) = p(X=1) + p(X=2) = 0,3 + 0,4 = 0,7$$

$$2. \quad E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,2 = 0 + 0,3 + 0,8 + 0,6 = 1,7$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,1 + 1^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,4 + 3^2 \times 0,2$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,3 + 4 \times 0,4 + 9 \times 0,2$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) = 0 + 0,3 + 1,6 + 1,8$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) = 3,7$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3,7 - 1,7^2 = 3,7 - 2,89 = 0,81.$$

$$\text{On en déduit l'écart-type : } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,81} = 0,9.$$

★ Exercice 17.4

Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x_i	-5	-2	0	1	3	6
p_i	1 / 6	1 / 12	1 / 4	1 / 4	1 / 12	1 / 6

Calculer son espérance, son écart type.

Correction :



Remarque : dans cet exercice, il y a un calcul de fractions à faire. On « mettra tout sur 12 ».

$$E(X) = -5 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{12} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{12} + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow E(X) = \frac{-5}{6} + \frac{-2}{12} + \frac{0}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{12} + \frac{6}{6}$$

$$\Leftrightarrow E(X) = \frac{-10}{12} + \frac{-2}{12} + \frac{0}{12} + \frac{3}{12} + \frac{3}{12} + \frac{12}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = (-5)^2 \times \frac{1}{6} + (-2)^2 \times \frac{1}{12} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{12} + 6^2 \times \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) = \frac{25}{6} + \frac{4}{12} + \frac{0}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{12} + \frac{36}{6}$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) = \frac{50}{12} + \frac{4}{12} + \frac{0}{12} + \frac{3}{12} + \frac{9}{12} + \frac{72}{12} = \frac{138}{12} = \frac{\cancel{2} \times 69}{\cancel{2} \times 6} = \frac{69}{6} = \frac{\cancel{3} \times 23}{\cancel{3} \times 2} = \frac{23}{2}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{23}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{23}{2} - \frac{1}{4} = \frac{46}{4} - \frac{1}{4} = \frac{45}{4}. \text{ D'où } \sigma(X) = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}.$$

★ Exercice 17.5

Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance de X puis la variance de X .

Correction :

1. $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 10\}$ et :

x_i	0	1	10
$p[X = x_i]$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$2. E(X) = 0 \times \frac{3}{6} + 1 \times \frac{2}{6} + 10 \times \frac{1}{6} = \frac{0}{6} + \frac{2}{6} + \frac{10}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{3}{6} + 1^2 \times \frac{2}{6} + 10^2 \times \frac{1}{6} = \frac{0}{6} + \frac{2}{6} + \frac{100}{6} = \frac{102}{6} = \frac{\cancel{2} \times 51}{\cancel{2} \times 3} = \frac{51}{3} = 17.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 17 - 2^2 = 17 - 4 = 13.$$

★ Exercice 17.6

Un sac contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard et simultanément 4 boules. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de boules blanches obtenues. Quelle est la loi de X ? Préciser son espérance et sa variance.

Correction :

On peut tirer au plus quatre boules blanches et au moins une boule blanche (si on tire les trois boules noires). On a donc $X(\Omega) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Il y a au total $\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = 70$ tirages possibles.

Le nombre de tirages de 4 boules blanches est : $\binom{5}{4} = 5$. Donc $P(X = 4) = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$.

Le nombre de tirages de 3 boules blanches est : $\binom{5}{3} \times \binom{3}{1} = 10 \times 3 = 30$.

Donc $P(X = 3) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$.

Le nombre de tirages de 2 boules blanches est : $\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = 10 \times 3 = 30$.

Donc $P(X = 2) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$.

Le nombre de tirages de 1 boule blanche est : $\binom{5}{1} \times \binom{3}{3} = 5 \times 1 = 5$.

Donc $P(X = 1) = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$.

Il vient : $E(X) = 1 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{3}{7} + 4 \times \frac{1}{14} = \frac{35}{14} = \frac{5}{2}$.

Puis : $E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{14} + 2^2 \times \frac{3}{7} + 3^2 \times \frac{3}{7} + 4^2 \times \frac{1}{14} = \frac{95}{14}$.

Enfin, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{95}{14} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{95}{14} - \frac{25}{4} = \frac{15}{28}.$$

Propriétés de la variance

★ Exercice 17.7

1. On reprend l'énoncé de l'exercice 1.
On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = 5X - 2$.
Calculer l'espérance puis la variance de Y .
2. Même question avec $Z = 4X + 3$.

Correction :

1. Par linéarité de l'espérance : $E(Y) = E(5X - 2) = 5E(X) - 2 = 5 \times 2 - 2 = 10 - 2 = 8$.
 $V(aX + b) = a^2 V(X)$, donc $V(Y) = V(5X - 2) = 5^2 V(X) = 25 \times 1 = 25$.
2. Par linéarité de l'espérance : $E(Z) = E(4X + 3) = 4E(X) + 3 = 4 \times 2 + 3 = 8 + 3 = 11$.
 $V(aX + b) = a^2 V(X)$, donc $V(Z) = V(4X + 3) = 4^2 V(X) = 16 \times 1 = 16$.

★ Exercice 17.8

On considère la variable aléatoire X de loi :

x_i	0	1	2
$p[X = x_i]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .
- On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = 2X - 1$.
 - Donner la loi de probabilité de Y .
 - Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de Y .

Correction :

$$1. \quad E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{0}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{2} = \frac{0}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{5}{4}.$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{0}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{2} = \frac{0}{4} + \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{9}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{25}{16} = \frac{36}{16} - \frac{25}{16} = \frac{11}{16}.$$

- Si $x=0$, $y=2 \times 0 - 1 = -1$, si $x=1$, $y=2 \times 1 - 1 = 1$ et si $x=2$, $y=2 \times 2 - 1 = 3$.

On en déduit :

y_i	-1	1	3
$p[Y = y_i]$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

- Il y a deux possibilités :

- soit on refait tous les calculs à partir du tableau précédent,
- soit on utilise les propriétés du cours. C'est ce que l'on va faire, ici.

$$\text{Par linéarité de l'espérance : } E(Y) = E(2X - 1) = 2E(X) - 1 = 2 \times \frac{5}{4} - 1 = \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X), \text{ donc } V(Y) = V(2X - 1) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{11}{16} = \frac{11}{4}.$$

$$\text{On en déduit : } \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$