4) Décrire l'événement $(X = 5)$, puis l'événement $(X = 2k+1)$ pour tout entier $k \geq 1$ et montrer que pour tout entier naturel non nul k : $P(X = 2k+1) = \left(\frac{3}{16}\right)^k$.

5) Calculer les sommes $S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k)$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k+1)$. Vérifier que $S_1 + S_2 = 1$.

6) Calculer l'espérance de X. On rappelle que $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $-1 < x < 1$.

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \text{ pour } x > 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 2 cm).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = (-x+2)e^x - 2$ pour tout réel x positif ou nul.

1) Calculer la limite de g en $+\infty$.
2) Etudier les variations de la fonction g sur $[0,+\infty[$. (On précisera $g(0)$).
3) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle , notée α.
4) Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$ et montrer que $1 < \alpha < 2$. On donne $e \approx 2{,}7$.

Partie B

1) Rappeler $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
2) En déduire que f est continue et dérivable en 0. Préciser une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3) Déterminer la limite de f en $+\infty$, et donner une interprétation graphique de cette limite.
4) a) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
   b) En déduire le tableau de variations de f, en y faisant apparaître le réel α défini au A,3).
   c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$, où α est le réel défini au A,3).
5) Tracer la courbe (C) en plaçant les tangentes aux points d'abscisses 0 et α. On donne $\alpha \approx 1{,}6$.

Partie C

Soit la suite $(u_n)_{n \in IN}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 1$.
   b) Montrer que la suite est décroissante (on utilisera un raisonnement par récurrence).
   c) En déduire que la suite est convergente (sa limite est étudiée dans les questions suivantes).
2) L'équation $f(x) = x$ a une solution évidente : le nombre 0. On se propose de rechercher s'il existe d'autres solutions à cette équation.
   a) Montrer que dans $]0,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $e^x - x - 1 = 0$.
   b) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e^x - x - 1$.
   c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0,+\infty[$.
3) Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in IN}$.