# Exercices d'approfondissement « Fonctions »

**Exercice 1** ***ESCP 2009***

On considère la fonction $f$ définie, pour tout réel $x$ de $[0\,;+\infty[$, par la relation : $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

**1.** **(a)** On note $f'$ la dérivée de *f*. Calculer, pour tout réel *x* positif, $f'(x)$.

**(b)** Étudier, suivant les valeurs de *x*, le signe de $f'(x)$.

**(c)** Déterminer la limite de $f(x)$ quand *x* tend vers $+\infty$.

**(d)** Dresser le tableau de variation de *f*.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=1$ et la relation : pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

**2.** **(a)** Calculer $u_1$ et $u_2$.

**Exercice 2** ***Ecricome 2012***

On considère la fonction *f* définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$\forall x\in[1\,;+\infty[,\qquad f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$$

On note $C_f$ sa courbe représentative. On définit également la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$u_0\in[1\,;+\infty[,\qquad \forall n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}=f(u_n)$$

**1.** Étude de $(u_n)_{n\geq 0}$.

**(a)** Soit $x\geq 1$. Établir les inégalités suivantes : $1\leq f(x)$ et $f(x)\leq\dfrac{x+1}{2}$.

(b) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ 1\leq u_n$.

En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}\leq\dfrac{u_n+1}{2}$.

(c) Prouver par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\qquad 1\leq u_n\leq 1+\dfrac{1}{2^n}(u_0-1)$.

**(d)** Démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et donner la valeur de sa limite.

**2.** Asymptote à $C_f$. On pose $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \to +\infty} \left[ f(x) - a\,x \right]$.

**(a)** Donner la valeur de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

**(b)** Calculer $a$ et $b$.

**(c)** Montrer qu'il existe un réel $c$ tel que :

$$\forall x \in [1\,;+\infty[, \qquad f(x) - ax - b = \frac{c}{2x-1}$$

et donner la valeur de $c$.

**(d)** Prouver que $C_f$ admet une asymptote $(D)$ dont on donnera une équation ainsi que la position de $(D)$ par rapport à $C_f$.

**3.** Variations de *f*.

**(a)** Soit $x \in [1\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$.

**(b)** Préciser le sens de variation de *f* sur $[1\,;+\infty[$.

**(c)** Tracer la courbe $C_f$ ainsi que la droite $(D)$ et la tangente $(T)$ à $C_f$ au point d'abscisse 1.

**4.** Étude d'une réciproque.

(a) Montrer que la fonction *f* réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $[1\,;+\infty[$.

**(b)** Soit $t \in [1\,;+\infty[$. Prouver que l'équation $x^2 - 2t\,x + t = 0$ (d'inconnue *x*) admet des solutions réelles et les donner.

**(c)** Soit $t \in [1\,;+\infty[$. Déterminer l'unique réel $x \in [1\,;+\infty[$ tel que $f(x) = t$.

**Exercice 3** *d'après Ecricome 2005*

**1. (a)** Étudier le signe du quotient $\frac{1+x}{1-x}$ suivant les valeurs du réel *x*.

**(b)** Résoudre $\frac{1+x}{1-x} > 0$.

**2.** On considère une fonction $\varphi$ définie sur $]-1,\ 1[$ et on admet que sa dérivée est $\varphi'(x) = 2\frac{x^2}{1-x^2}$.

**(a)** En déduire le tableau de variation de $\varphi$.

**(b)** Calculer la dérivée seconde de $\varphi$ sur $]-1,\ 1[$.

**(c)** En déduire que : $\forall x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right],\ 0 \le \varphi'(x) \le \frac{2}{3}$.