

Lois de probabilité usuelles

On considère une expérience aléatoire d'univers associé Ω .

I. Loi certaine

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi certaine s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'événement $[X = a]$ est certain c'est-à-dire :

$$X(\Omega) = \{a\} \quad \text{et} \quad P[X = a] = 1$$

On dit aussi que X est une variable aléatoire certaine.

Exemple :

Une urne contient n boules de couleurs différentes qui portent toutes le numéro 7. On tire une boule et on note X le numéro tiré. Alors X est une variable aléatoire certaine et $[X = 7]$ est un événement certain.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire certaine égale à a . Alors,

$$E(X) = a \quad \text{et} \quad V(X) = 0$$

II. Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$

Exercices 1, 2 & 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ si :

$$X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P[X = k] = \frac{1}{n}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors,

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

III. Loi de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues possibles.

Exemple : lancer d'une pièce de monnaie.

On considère la variable aléatoire X qui associe 1 à l'issue de l'épreuve et 0 sinon.

On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p .

x_i	0	1
p_i	$1 - p$	p

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p . Alors,

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p)$$

★ Exercice : schéma de Bernoulli :

On considère trois lancers successifs d'un dé non truqué avec le succès « obtenir 6 ».

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès. Calculer $p[X = 2]$.

IV. Loi binomiale

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité obtenue lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p identiques et indépendantes.

Exemple : 10 lancers d'une pièce de monnaie.

On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès.

Soit un entier k tel que $0 \leq k \leq n$. La probabilité d'obtenir k succès lors de la répétition de n

épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p est : $P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi binomiale de paramètres n et p . Alors,

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p)$$