Intégration
Exercices

Calcul d'intégrales

★ Exercice 20.1

Calculer :

$I_1 = \int_1^3 x\,\mathrm{d}x$, $I_2 = \int_1^2 \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{d}x$, $I_3 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $I_4 = \int_{\mathrm{e}^2}^{\mathrm{e}^5} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,

$I_5 = \int_0^2 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$, $I_6 = \int_0^1 \left(x^3 + x^2 + x - 1\right)\mathrm{d}x$, $I_7 = \int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$, $I_8 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$,

$I_9 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

Relation de Chasles

★ Exercice 20.2

1. Soit *f* la fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

On considère l'intégrale : $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Sur combien d'intervalles est définie la fonction *f* ?

b) Sur quel intervalle est définie l'intégrale ? Est-il nécessaire de la découper en plusieurs intégrales pour la calculer ? Si oui, en combien d'intégrales ?

c) Calculer $\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

2. Soit *g* la fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On considère l'intégrale : $\int_{-2}^3 g(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Sur combien d'intervalles est définie la fonction *g* ?

b) Sur quel intervalle est définie l'intégrale ? Est-il nécessaire de la découper en plusieurs intégrales pour la calculer ? Si oui, en combien d'intégrales ?

c) Calculer $\int_{-2}^3 g(x)\,\mathrm{d}x$

3. Soit h la fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ par : $h(x)=\begin{cases} x & \text{si } 1\leq x\leq 2 \\ -x & \text{si } 2\leq x\leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\int_0^6 h(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Soit j la fonction définie sur $]-\infty,+\infty[$ par : $j(x)=\begin{cases} a\,x(2-x) & \text{pour } x\in[0\,;\,2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

où a est un réel. Calculer $\int_{-4}^{3} j(x)\,\mathrm{d}x$.

Signe d'une intégrale

★ **Exercice 20.3**

Sans les calculer, déterminer le signe de $\int_2^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ et de $\int_{0,5}^{0,8} \ln x\,\mathrm{d}x$.

Calcul d'intégrales quand une primitive est donnée/suggérée

★ **Exercice 20.4**

1. Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln(2x)-x$, est une primitive de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(2x)$.

2. En déduire la valeur de $J=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln(2x)\,\mathrm{d}x$.

★ **Exercice 20.5**

On appelle f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=(\ln x)^2+2\ln x-2$.

1. Dériver la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x(\ln x)^2$.

2. Calculer la valeur exacte de $I=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.