Primitives d'une fonction continue
et Intégration

I. Primitives d'une fonction continue

1. Primitive de *f* sur *I*

Définition :
Soient *f* et *F* deux fonctions définies sur un intervalle *I* qui vérifient :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

On dit aussi bien :
- *f* est la dérivée de *F*
- ***F* est une primitive de *f***

Propriété :
Une fonction possède une infinité de primitives, toutes égales à une constante près.
Par exemple, pour $x \in \mathbb{R}$, $F_1(x) = x^2$, $F_2(x) = x^2 + 5$, $F_3(x) = x^2 - 51$ ou $F_4(x) = x^2 + \dfrac{3157}{17}$ sont quatre primitives de la fonction $f(x) = 2x$.

★ **Exercice 1 (premier type de tâche) :**

Démontrer que F définie sur $]3\,;+\infty[$ par $F(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$ sur $]3\,;+\infty[$.

★ **Exercice 2 (deuxième type de tâche) :**

1. Déterminer une primitive de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une primitive de $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Existence de primitives

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur l'intervalle I.

Remarque :
Ce théorème donne une condition suffisante pour justifier l'existence des primitives d'une fonction, mais cette condition n'est pas nécessaire : certaines fonctions discontinues peuvent aussi admettre des primitives.

3. Primitives d'une même fonction

Si f est une fonction définie sur un intervalle I qui admet une primitive F sur I, alors :
- les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \to F(x)+k$, $k \in \mathbb{R}$;
- pour tout couple $(x_0\ ;\ y_0)$, avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in I$, il existe une unique primitive F_0 de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

Autrement dit, trois types de questions peuvent être – en théorie – posées :
- « Déterminer **une** primitive » (sous-entendu, *n'importe laquelle*)
- « Déterminer **les** primitives » (sous-entendu, *toutes*)
- « Déterminer **la** primitive **qui vérifie une condition** »

★ **Exercice 3 :**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$

1. Déterminer une primitive de f.
2. Déterminer les primitives de f.
3. Déterminer la primitive de f qui prend la valeur 0 en 1.

⇨ Beaucoup s'entraîner sur Wims

II. Intégration

1. Intégrale et primitive

Si f est continue, positive et croissante sur un intervalle $[a\,;b]$, alors la fonction $x \to A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur $[a\,;\,b]$ qui s'annule en a.
On admet que ce résultat se généralise.

a) Théorème

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément quelconque de I. La fonction Φ définie sur I par $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarques :

- On ne peut pas employer la même lettre pour une borne de l'intégrale (ici x) et la variable “muette” d'intégration, notée ici t.
- La fonction Φ définie dans le théorème est donc dérivable sur I de dérivée f.

Exemple :

La fonction $t \to \frac{1}{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$; son unique primitive qui s'annule en 1 étant la fonction logarithme népérien, on a, pour tout t de $]0\,;+\infty[$, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a et b de I, on a : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I.

On a ainsi un procédé de calcul d'une intégrale pour une fonction continue dont on connaît une primitive. L'expression a un sens quels que soient le signe de la fonction f et l'ordre des bornes a et b.
Pour présenter les calculs, on peut écrire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b$.

2. Propriétés de l'intégrale

Les démonstrations reposent en général sur le calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive, mais l'interprétation en termes d'aire permet de visualiser ces propriétés dans certains cas.

a) Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et k un réel.
Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_a^b (kf)(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Positivité

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I avec $a \leq b$.
Si f est positive sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Cette propriété est liée à la définition de l'intégrale, pour une fonction positive, comme aire située sous la courbe représentative de la fonction sur $[a\,;\,b]$.

d) Signe d'une intégrale

Si $f \geq 0$ sur I	avec $a \leq b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$	avec $a \geq b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$
Si $f \leq 0$ sur I	avec $a \leq b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$	avec $a \geq b$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

e) Conservation de l'ordre

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.
Si $f \leq g$ sur $[a\,;\,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.